

В. Ю. ТОПОЛОВ, А. С. БОГАТИН

АНАЛИЗ ОТВЕТОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ПО ОБЩЕЙ ФИЗИКЕ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ



САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2011

ББК 22.3я73

Т 58

Тополов В. Ю., Богатин А. С.

Т 58 Анализ ответов при решении задач по общей физике: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2011. — 80 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-1277-8

Рассмотрены 80 примеров анализа ответов задач по основным темам университетского курса физики. Показаны различные возможности анализа, способствующего эффективному усвоению учебного материала, развитию навыков физического мышления и практического применения полученных знаний.

Учебное пособие предназначено для студентов естественнонаучных факультетов университетов, а также может быть использовано на практических занятиях по физике в технических и педагогических вузах.

ББК 22.3я73

Рецензенты:

И. П. РАЕВСКИЙ — доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей физики Южного федерального университета, зав. отделом физики полупроводников НИИ физики ЮФУ;

А. А. ЛАВРЕНТЬЕВ — доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой электротехники и электроники Донского государственного технического университета.

Обложка

И. М. ЛЕОНТЬЕВА

*Охраняется законом РФ об авторском праве.
Воспроизведение всей книги или любой ее части
запрещается без письменного разрешения издателя.
Любые попытки нарушения закона
будут преследоваться в судебном порядке.*

© Издательство «Лань», 2011

© В. Ю. Тополов, А. С. Богатин, 2011

© Издательство «Лань»,

художественное оформление, 2011

Содержание

Введение	4
1. Механика	6
1.1. Динамика материальной точки	6
1.2. Динамика твердого тела	11
1.3. Законы сохранения в механике	13
2. Электричество и магнетизм	16
2.1. Электростатика	16
2.2. Постоянный электрический ток	21
2.3. Магнитное поле тока	25
2.4. Электромагнитная индукция	29
3. Колебания и волны	33
3.1. Механические колебания	33
3.1.1. Колебания систем с одной степенью свободы	33
3.1.2. Колебания систем со многими степенями свободы	38
3.2. Электромагнитные колебания	40
3.3. Волновые процессы	45
4. Оптика	47
4.1. Геометрическая оптика и фотометрия	47
4.2. Интерференция света	50
4.3. Дифракция света	52
4.4. Формулы Френеля. Поляризация света	54
4.5. Поглощение света	56
4.6. Квантовая природа излучения	57
5. Физика макросистем	60
5.1. Газообразное состояние	60
5.2. Основы молекулярно-кинетической теории	67
5.3. Явления переноса	69
5.4. Жидкое состояние	71
5.5. Фазовые превращения	75
Список литературы	77

Введение

“...на каждом этапе работы старайтесь охватить еще не затронутый участок и почерпнуть полезную мысль из того, что вам не пришлось еще исследовать”

Д. Пойа

“Eigentlich weiss man nur, wenn man wenig weiss, mit dem Wissen wächst der Zweifel”

J.W. Goethe

Решение физической задачи предполагает восстановление неизвестных качественных и количественных связей между физическими объектами и явлениями, подразумевающимися в условии. Наряду с анализом физического содержания, выделением наиболее важных факторов, определяющих протекание различных процессов и явлений, а также при выяснении применимости тех или иных законов и соотношений обычно возникают вопросы, связанные с необходимостью осмысления полученных результатов и возможных путей практической реализации результатов. Такие вопросы являются закономерными и существенными не только при активном и осмысленном изучении физики, но и в процессе приобщения студентов к научным физическим исследованиям. Это обстоятельство ярко иллюстрируется словами И. В. Гёте: “Одно несомненно — когда знаешь мало, то с увеличением знания растет сомнение”.

Разрешить указанное противоречие (увеличение объема знаний и возрастание сомнения) в ходе изучения того или иного предмета можно различными способами. Умение решать задачи по физике — один из важнейших показателей практического применения студентами знаний, полученных на лекциях и при самостоятельном изучении материала из учебников. При решении задач (т. е. при увеличении объема знаний и/или при их закреплении на пути от чтения условия до получения ответа задачи) одним из таких способов является анализ полученных ответов. Именно в ходе анализа ответов возникает во-

прос, перекликающийся с вышеупомянутыми словами И. В. Гёте: знания увеличились, а сомнения? В зависимости от ответа на этот вопрос можно судить о глубине изучения курса, умении студентов самостоятельно мыслить и практически применять полученные знания. Цель настоящего учебного пособия состоит в том, чтобы на конкретных примерах показать важность и преимущества анализа ответов при решении задач из различных разделов курса физики, а также привить студентам естественнонаучных специальностей необходимые для этого навыки. Представленное учебное пособие может быть полезным на аудиторных практических занятиях, при выполнении студентами домашних заданий, а также при подготовке студентов к контрольным работам, тестам и экзаменам.

1. Механика

Практика показывает, что при изучении механики наиболее четко прослеживается корреляция между числом решенных задач и объемом усвоенного теоретического материала. Проводимый анализ решения задачи позволяет часто переносить акцент с чисто количественного уровня на качественный. В ходе анализа решения задачи, как правило, выясняют [1], каким образом и от каких физических величин зависит искомая величина, каковы возможные границы применимости, какова физическая сущность сделанных при решении приближенных оценок, предельных переходов и т. д. Иногда полезно рассмотреть подобную задачу с некоторым упрощением или усложнением исходного условия. В ряде случаев, например, при изучении динамики твердого тела, является важным предельный переход к материальной точке с целью сравнения получаемых результатов. Необходимыми, но недостаточными являются также проверка размерности полученной в ответе формулы по входящим в нее физическим величинам, сравнение полученных многозначных ответов и выяснение их физического смысла, а в некоторых случаях — и сравнение полученных численных результатов с мировыми физическими константами. Ниже мы рассмотрим примеры анализа ответов ряда задач по механике.

1.1. Динамика материальной точки

Задача 1.1 ([2], № 1.64). На наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом, поместим два бруска 1 и 2 (рисунок 1). Массы брусков равны m_1 и m_2 , коэффициенты трения

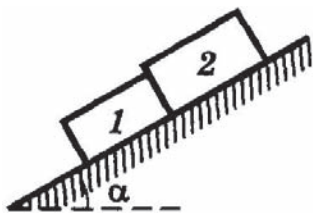


Рисунок 1 – К задаче 1.1

между плоскостью и этими брусками — соответственно k_1 и k_2 , причем $k_1 > k_2$. Найти:

а) силу взаимодействия между брусками в процессе движения;

б) значения угла α , при которых не будет скольжения.

Ответ:

$$\text{а) } F = (k_1 - k_2) m_1 m_2 g \cos \alpha / (m_1 + m_2); \quad (1.1)$$

$$\text{б) } \operatorname{tg} \alpha < (k_1 m_1 + k_2 m_2) / (m_1 + m_2). \quad (1.2)$$

Выражение (1.1) для силы взаимодействия F инвариантно относительно перестановки индексов у масс брусков m_i , но меняет знак при аналогичной перестановке индексов у коэффициентов трения k_i ($i = 1; 2$). Существенно, что сила $F > 0$ при $k_1 > k_2$, т. е. при более шероховатой поверхности бруска 1 (нижнего, как показано на рисунке 1) по сравнению с поверхностью бруска 2, несмотря на возможные различия в их массах m_i .

Предельные случаи отсутствия силы взаимодействия между брусками (т. е. случай $F = 0$, см. формулу (1.1)) сводятся к выполнению одного из следующих условий:

1) $k_1 = k_2$, т. е. поверхности брусков 1 и 2 одинаково шероховаты по отношению к наклонной плоскости, а бруски скользят вниз как единое целое;

2) $m_1 = 0$ или $m_2 = 0$, т. е. когда отсутствует один из брусков (подчеркнем роль массы как меры инертности), существенно упрощается уравнение динамики другого бруска;

3) $g = 0$ соответствует отсутствию поля тяготения и может существенно изменить характер движения всей механической системы;

4) $\cos \alpha = 0$, т. е. угол наклона $\alpha = \pi / 2$, соответствует свободному падению брусков с одинаковыми ускорениями $a = g = \text{const}$ (это состояние невесомости брусков).

Если в выражении (1.2) предположить, например, $m_2 = 0$, то условие (1.2) приобретает вид $\operatorname{tg} \alpha < k_1$. Последнее неравенство представляет собой условие удержания бруска на шероховатой наклонной плоскости. Предельный переход к равенству $\operatorname{tg} \alpha = k_1$ позволяет на практике определять коэффициент трения скольжения.

Задача 1.2 ([2], № 1.67). В установке (рисунок 2) известны угол α и коэффициент трения k между телом m_1 и наклонной плоскостью. Массы блока и нити пренебрежимо малы, трения в блоке нет. Вначале оба тела неподвижны. Найти отношение масс m_1 / m_2 , при котором тело m_2 начнет: а) опускаться; б) подниматься.

Ответ:

$$\text{а) } m_2 / m_1 > \sin \alpha + k \cos \alpha; \quad (1.3)$$

$$\text{б) } m_2 / m_1 < \sin \alpha - k \cos \alpha. \quad (1.4)$$

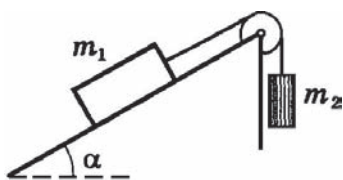


Рисунок 2 – К задаче 1.2

Интуитивно ясно, что бóльшая из масс данной установки вследствие бóльшей силы тяжести при определенных условиях должна опускаться вниз. При отсутствии трения в системе (т. е. $k = 0$) неравенства (1.3) и (1.4) упрощаются, и это проясняет ориентационные зависимости. Например, в случае $\alpha \rightarrow 0$ (тело

1 на практически горизонтальной плоскости) выражение (1.3) принимает вид $m_2 / m_1 > 0$, т. е. тело 2 может опускаться независимо от величины массы m_1 тела 1. Если $\alpha \rightarrow \pi / 2$, то выражение (1.3) преобразуется к виду $m_2 > m_1$, т. е. «перетягивает» более тяжелое тело 2. Отметим, что в случае $\alpha \rightarrow 0$ при $k = 0$ выражение (1.4) принимает необычный вид $m_2 / m_1 < 0$, т. е. предполагается наличие в системе отрицательной массы, что физически несостоятельно. Физическое противоречие легко разрешается, если представить себе невозможность подъема тела 2 (рисунок 2) в поле сил тяжести при взаимодействии тела 2 с телом 1.

При учете трения ($k > 0$) и уменьшении массы тела 2 ($m_2 \rightarrow 0$) можно рассмотреть скольжение тела 1 по наклонной плоскости. В соответствии с формулой (1.4) это означает выполнение условия $\sin \alpha - k \cos \alpha \rightarrow 0$, т. е. в предельном случае имеем

$$k = \operatorname{tg} \alpha. \quad (1.5)$$

Как известно, угол α , удовлетворяющий условию (1.5), равен наименьшему углу наклона плоскости (см. рисунок 2), при котором лежащее на наклонной плоскости тело (материальная точка) начинает скользить вниз под действием силы тяжести. Условие (1.5) представляет практический интерес при определении коэффициента трения скольжения.

Задача 1.3 ([2], № 1.79). На горизонтальной поверхности находится призма 1 массы m_1 с углом α (рисунок 3) и на ней брусок 2 массы m_2 . Пренебрегая трением, найти ускорение призмы.

Ответ:

$$a = m_2 g \sin \alpha \cos \alpha / (m_1 + m_2 \sin^2 \alpha). \quad (1.6)$$

Не подлежит сомнению, что на ускорение a из (1.6) в значительной мере влияют тело 2 и угол наклона α (рисунок 3): в предельном случае $m_2 \rightarrow 0$ или $\alpha \rightarrow 0$ мы приходим к усло-

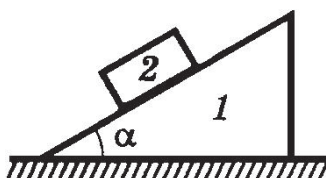


Рисунок 3 – К задаче 1.3

вию 0, т. е. реализуется I закон Ньютона для призмы 1. При сравнительно малой массе тела m_2 (т. е. когда $m_2 / m_1 \ll 1$) имеет место предельный переход $a \rightarrow g \operatorname{ctg} \alpha$. В этом случае при малых углах наклона α следовало бы ожидать значительного ускорения призмы 1. Однако практически это было бы трудно реализовать из-за присутствия трения между поверхностями призмы 1 и бруска 2, а также между призмой 1 и горизонтальной поверхностью (рисунок 3).

Задача 1.4 ([2], № 1.90). На горизонтальной плоскости с коэффициентом трения k лежит тело массы m . В момент $t = 0$ к нему приложили горизонтальную силу, зависящую от времени как $\mathbf{F} = \mathbf{b}t$, где \mathbf{b} — постоянный вектор. Найти путь, пройденный телом за первые t секунд действия этой силы.

Ответ:

$$\begin{aligned} s &= 0 \text{ при } t \leq t_0; \\ s &= b(t - t_0)^3 / (6m) \text{ при } t \geq t_0, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $t_0 = kmg / b$ — момент времени, с которого начнется движение.

Задачи данного типа решаются с помощью дифференциального уравнения $m(d\mathbf{v} / dt) = \sum_i \mathbf{F}_i$, записанного в соответствии со II законом Ньютона (\mathbf{v} — мгновенная скорость тела, t — время, \mathbf{F}_i — внешние силы, приложенные к телу). Последовательное нахождение \mathbf{v} при удовлетворении начальных условий, а затем по известной скорости \mathbf{v} определение пройденного пути s является важным шагом, предшествующим анализу ответа.

При анализе соотношения (1.7) следует обратить внимание на «сдерживающую» роль сил трения: движение тела начинается лишь при преодолении некоторого барьера, связанного с равенством $|\mathbf{F}| = |\mathbf{F}_{\text{тр}}|$. Этим объясняется присутствие фактора t_0 . Вид зависимости (1.7) указывает на то, что путь $s \sim t^3$, т. е. движение тела не является ни равноускоренным ($s \sim t^2$), ни равномерным ($s \sim t$). Причина этого связана с временной зависимостью силы $F \sim t$, вызывающей движение данного тела с учетом действующей силы трения.

Задача 1.5. Лодка массой m под парусом развила скорость v_0 . Как будет изменяться во времени модуль скорости лодки $v(t)$ при движении по стоячей воде после спуска паруса, если сила сопротивления воды движению лодки равна $\mathbf{F} = -r v^k \mathbf{v} / v$, где r — коэффициент пропорциональности, а показатель $k > 0$? При каких показателях k время движения лодки до остановки $\tau_{\text{ост}}$ конечно?

Ответ:

$$v(t) = v_0 \exp(-tr / m) \text{ при } k=1; \quad (1.8)$$

$$v(t) = [-v_0^{1-k} + (1-k)(rt / m)]^{1/(1-k)} \text{ при } k \neq 1; \quad (1.9)$$

значение $\tau_{\text{ост}}$ конечно при $0 \leq k < 1$.

Анализ соотношений (1.8) и (1.9) позволяет проверить выполнение условия $v(\tau_{\text{ост}}) = 0$. Нетрудно заметить, что временная зависимость скорости $v(t)$ из (1.8) асимптотически стремится к нулю, а соответствующее время до остановки $\tau_{\text{ост}} \rightarrow \infty$. Определение времени $\tau_{\text{ост}}$ из формулы (1.9) приводит к следующему соотношению: $\tau_{\text{ост}} = v_0^{1-k} m r^{-1} (1-k)^{-1}$. По физическому смыслу время до остановки $\tau_{\text{ост}} \geq 0$, что соответствует неравенству $0 \leq k < 1$.

Из курса физики известно, что силы трения, возникающие при движении тел в жидких или газообразных средах, обычно аппроксимируются зависимостями вида $\mathbf{F}_{\text{тр}} = -r_1 \mathbf{v}$ (при относительно малых скоростях, показатель $k = 1$) и $\mathbf{F}_{\text{тр}} = -r_2 v^2 \mathbf{v} / v$ (при больших скоростях, показатель $k = 2$). Однако, как показывает анализ формул (1.8) и (1.9), при $k = 1; 2$ время $\tau_{\text{ост}}$ становится бесконечно большим. Это связано с неучетом дополнительных физических факторов, влияющих на движение лодки до полной остановки. Заметим, что при небольших отклонениях от линейной зависимости $\mathbf{F}_{\text{тр}} \sim \mathbf{v}$ в случае медленного

движения лодки (т. е. при показателе $k < 1$) можно определить конечные значения $\tau_{\text{ост}}$.

1.2. Динамика твердого тела

Задача 1.6 ([2], № 1.286). На ступенчатый блок (рисунок 4) намотаны в противоположных направлениях две нити. На конец одной нити действуют постоянной силой F , а к концу другой нити прикреплен груз массы m . Известны радиусы R_1 и R_2 блока и его момент инерции I относительно оси вращения. Трения нет. Найти угловое ускорение блока.

Ответ:

$$\beta_z = (m g R_2 - F R_1) / (I + m R_2^2), \quad (1.10)$$

где ось Z направлена за плоскость рисунка 4.

В соответствии с формулой (1.10) блок может совершать равноускоренное движение по часовой стрелке благодаря действию большего момента силы (это момент силы тяжести груза массы m). Уменьшение массы груза (вплоть до исключения груза, т. е. $m = 0$) влечет за собой изменение знака углового ускорения блока β_z в формуле (1.10) и указывает на прямопропорциональную зависимость β_z от момента приложенной силы, что коррелирует основным уравнением вращательного движения твердого тела. Возможное уменьшение массы блока без изменения его радиусов (т. е. момент инерции ступенчатого блока $I \rightarrow 0$ при радиусах $R_1 = \text{const}$ и $R_2 = \text{const}$) вызовет лишь некоторое увеличение β_z , как это следует из (1.10). В предельном случае $R_1 \rightarrow 0$ имеет место нулевой момент силы, что также приводит к увеличению β_z . Последнее обстоятельство указывает на важную роль геометрического фактора (например, радиусов отдельных насадок блока и т. п.) при описании вращательного движения в данной механической системе (см. рисунок 4).

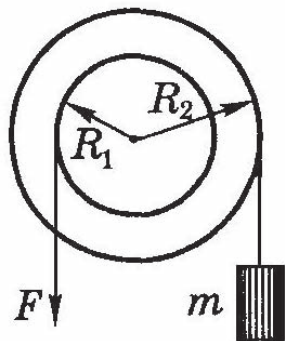
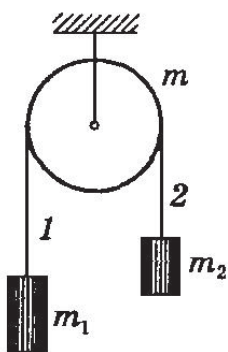


Рисунок 4 – К задаче 1.6



Задача 1.7 ([2], № 1.292). В установке, показанной на рисунке 5, известны масса однородного сплошного цилиндра m , его радиус R и массы тел m_1 и m_2 . Скольжения нити и трения в оси цилиндра нет. Найти угловое ускорение цилиндра и отношение натяжений T_1 / T_2 вертикальных участков нити в процессе движения. Убедиться, что при $m \rightarrow 0$ $T_1 = T_2$.

Ответ:

$$\beta = |m_2 - m_1| g / [(m_1 + m_2 + (m/2)) R]; \quad (1.11)$$

Рисунок 5 – К задаче 1.7 $T_1 / T_2 = m_1(m_1 + 4m_2) / [m_2(m_1 + 4m_2)]$. (1.12)

Выражения (1.11) и (1.12) инвариантны относительно перестановки в них индексов 1 и 2, т. е. мы можем рассматривать при определенных условиях движение груза 1 вниз или, наоборот, движение груза 2 вниз. Непосредственно подставляя в формулу (1.12) величину $m = 0$, легко получить равенство $T_1 / T_2 = 1$. Отметим, что с подобным приближением обычно встречаются в задачах по динамике материальной точки: в условия, как правило, включаются предположения о невесомом блоке, а также о невесомых и нерастяжимых нитях. Знак модуля в формуле (1.11) указывает на зависимость направления вращения блока (рисунок 5) от соотношения между массами тел m_1 и m_2 : «перетягивает» более тяжелое тело. Как и в формуле (1.10), уменьшение массы блока m ведет к возрастанию, согласно выражению (1.11), углового ускорения блока β . Фактически это связано с уменьшением момента инерции блока при сохранении его геометрических размеров, что позволяет удерживать неизменным баланс моментов сил, действующих на блок. Последнее положение указывает на важное значение момента инерции блока при рассмотрении движения в механической системе (см. рисунок 5).

Задача 1.8 ([3], № 324). Найти ускорения, с которыми будут опускаться центры двух одинаковых дисков Максвелла, если один подвешен к другому так, как указано на рисунке 6. Момент инерции диска равен I , масса диска и валика m , радиус валика, на который намотана нить, r .

Ответ: ускорения центров нижнего и верхнего дисков равны

$$a_1 = \frac{1 + \frac{3I}{mr^2}}{\frac{I}{mr^2} + (1 + \frac{I}{mr^2})^2} g \quad (1.13)$$

и

$$a_2 = \frac{1 + \frac{2I}{mr^2}}{\frac{I}{mr^2} + (1 + \frac{I}{mr^2})^2} g \quad (1.14)$$

соответственно.

Из выражений (1.13) и (1.14) видно, что для обоих дисков Максвелла (рисунок 6) получаются аналогичные по сути связи ускорений a_i с ускорением свободного падения g , массой отдельного блока m и радиусом r . В формулах (1.13) и (1.14) отсутствуют зависимости a_i от радиуса большого диска R , поскольку нет моментов сил, приложенных к внешним точкам большого диска. Основное различие между формулами (1.13) и (1.14), связанное с коэффициентом при моменте инерции диска I в числителе, может быть преодолено, если предположить в предельном случае для обоих дисков Максвелла $I \rightarrow 0$ или $I/(mr^2) \rightarrow 0$. Это привело бы к исчезновению моментов сил натяжения и к поступательному движению обоих дисков Максвелла в вертикальном направлении.

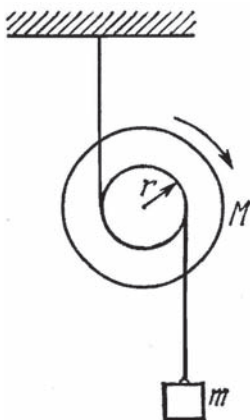


Рисунок 6 – К задаче 1.8

1.3. Законы сохранения в механике

Задача 1.9 ([2], № 1.205). После упругого столкновения частицы 1 с покоящейся частицей 2 обе частицы разлетелись симметрично относительно первоначального направления движения частицы 1, и угол между их направлениями разлета $\theta = 60^\circ$. Найти отношение масс этих частиц.

Ответ:

$$m_1 / m_2 = 1 + 2\cos\theta = 2,0. \quad (1.15)$$

Выражение (1.15) в общем виде характеризует зависимость отношения масс частиц m_1 / m_2 от угла между их направлениями разлета в случае упругого соударения. По физическому смыслу $m_1 / m_2 > 0$, что в соответствии с (1.15) означает $1 + 2\cos\theta > 0$, т. е. $\cos\theta > -1/2$. Известное из тригонометрии условие $0 \leq |\cos\theta| \leq 1$ приводит к неравенству $-1/2 < \cos\theta \leq 1$. Последнее неравенство означает, что угол между направлениями разлета частиц 1 и 2 может принимать значения из интервала $[0; 2\pi / 3]$.

Задача 1.10 ([2], № 1.210). Частица массы m испытала столкновение с покоившейся частицей массы M , в результате которого частица m отклонилась на угол $\pi/2$, а частица M отскочила под углом $\theta = 30^\circ$ к первоначальному направлению движения частицы m . На сколько процентов и как изменилась кинетическая энергия этой системы после столкновения, если $m / M = 5,0$?

Ответ:

$$\Delta T / T = [1 + (m / M)]\text{tg}^2 \theta + (m / M) - 1 = -40 \%. \quad (1.16)$$

Отрицательное значение $\Delta T / T$ в выражении (1.16) свидетельствует об уменьшении кинетической энергии данной системы и соответственно о неупругом соударении частиц. Неупругое соударение сохраняется также при некоторых изменениях отношения $m / M < 1$ и достаточно малых углах θ . Переход к упругому соударению частиц соответствует условию $\Delta T = 0$ (т. е. сохранению кинетической энергии системы), что согласно (1.16) приводит к соотношению $\text{tg}^2 \theta = (M - m) / (M + m)$, имеющему смысл при $m / M \leq 1$. Таким образом, различие между типами соударения двух частиц (упругое и неупругое) носит скорее количественный, чем качественный характер.

Задача 1.11 ([2], № 1.227). Небольшую шайбу поместили на внутреннюю гладкую поверхность неподвижного круглого конуса (рисунок 7) на высоте h_1 от его вершины и сообщили ей в горизонтальном направлении по касательной к поверхности конуса скорость v_1 . На какую высоту h_2 (от вершины конуса) поднимется шайба?

Ответ:

$$h_2 = [1 + \sqrt{1 + (8gh_1 / v_1^2)}] v_1^2 / (4g). \quad (1.17)$$

Проверка формулы (1.17) в предельном случае $h_1 \rightarrow 0$ позволяет определить максимальную высоту $h_2 \rightarrow v_1^2 / (2g)$, на которую могла бы подняться брошенная вертикально вверх шайба при отсутствии силы сопротивления воздуха. Однако по условию задачи начальная скорость v_1 сообщалась шайбе в горизонтальном направлении по касательной к поверхности конуса.

Теперь предположим, что шайбе на высоте h_1 сообщили скорость v_1 , удовлетворяющую условию $v_1^2 = 2gh_1$. Тогда в соответствии с формулой (1.17) шайба может подняться на высоту $h_2 = (1 + \sqrt{5}) / (2 h_1) < 2 h_1$. Причина того, что конечная высота подъема $h_2 < 2h_1$, очевидно, связана с горизонтальной ориентацией вектора скорости шайбы v_1 в начальный момент (рисунок 7).

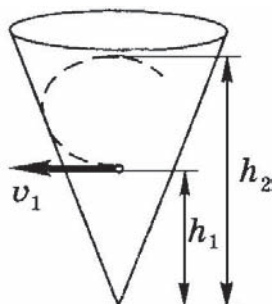


Рисунок 7 – К задаче 1.11

2. Электричество и магнетизм

Изучение электромагнитных явлений в курсе физики сопровождается решением широкого спектра задач — от простейших качественных до весьма сложных с применением различных математических методов. В этом разделе физики большое значение придается физическим моделям материальных объектов и осмысленному использованию этих моделей при изучении характеристик электромагнитного поля как одной из полевых форм материи. Как правило, учебные пособия и методические указания по решению задач ориентируют студента на четкое понимание и корректное применение физических законов, на векторный характер соотношений, описывающих электрические и магнитные поля, а также на некоторые “правила игры” на определенных этапах решения задачи. Значительно меньше затрагиваются вопросы, связанные с анализом ответов задач и с возможными следствиями, интересными частными случаями, предельными переходами и т. п., вытекающими из ответов. В настоящем разделе учебного пособия мы рассмотрим примеры анализа ответов при решении задач, что может быть полезным при изучении и дальнейшем применении законов электромагнетизма на практике.

2.1. Электростатика

Задача 2.1 ([2], № 2.18). Находящийся в вакууме тонкий прямой стержень длины $2a$ заряжен равномерно зарядом q . Найти модуль напряженности электрического поля как функцию расстояния r от центра стержня до точки прямой,

- а) перпендикулярной к стержню и проходящей через его центр;
- б) совпадающей с осью стержня, если $r > a$.

Исследовать полученные выражения при $r \gg a$.

Ответ:

$$\text{а) } E = q / [4\pi\epsilon_0 r \sqrt{a^2 + r^2}]; \quad (2.1)$$

$$\text{б) } E = q / [4\pi\epsilon_0 (r^2 - a^2)]. \quad (2.2)$$

Предельный переход $r \gg a$ в формулах (2.1) и (2.2) приводит к зависимости вида $E \sim 1/r^2$, соответствующей напряженности электрического поля точечного заряда (что согласуется с законом Кулона). Такой переход может иметь место при достаточно малой длине

стержня $2a$. В случае $r \rightarrow 0$ согласно (2.1) имеем $E \rightarrow \infty$, что соответствует напряженности поля на заряженном стержне, в частности, в его центре.

Другой предельный переход в (2.1) связан с условием $a \gg r$ — это соотношение реализуется для достаточно длинного стержня. При этом линейная плотность зарядов на стержне $\lambda = dq / dr$ определяется как $\lambda = q / (2a)$, а напряженность поля, создаваемого стержнем, $E \rightarrow q / (4\pi\epsilon_0 r a)$. Переходя к линейной плотности зарядов λ , мы получаем $E \rightarrow (2\lambda / r) / (4\pi\epsilon_0)$, что совпадает с зависимостью $E \sim 1 / r$ для бесконечно длинной заряженной нити.

Задача 2.2 ([4], № 2.24). Пространство заполнено зарядом с объемной плотностью $\rho = \rho_0 \exp(-\alpha r^3)$, где ρ_0 и α — положительные постоянные, r — расстояние от центра системы. Найти модуль напряженности электрического поля как функцию r . Исследовать полученное выражение при малых и больших r , т. е. $\alpha r^3 \ll 1$ и $\alpha r^3 \gg 1$.

Ответ:

$$E = [\rho_0 / (3\epsilon_0 \alpha r^2)][1 - \exp(-\alpha r^3)]; \quad (2.3)$$

$$E = \rho_0 r / (3\epsilon_0) \text{ при } \alpha r^3 \ll 1; \quad (2.4)$$

$$E = [\rho_0 / (3\epsilon_0 \alpha r^2)] \text{ при } \alpha r^3 \ll 1. \quad (2.5)$$

Анализ формулы (2.3) показывает, что в случае $\alpha r^3 \ll 1$ (т. е. на расстоянии $r \ll \alpha^{-1/3}$) напряженность электрического поля $E \sim r$ согласно (2.4). В случае $\alpha r^3 \gg 1$ (т. е. при $r \gg \alpha^{-1/3}$) напряженность электрического поля согласно (2.5) $E \sim 1 / r^2$, т. е. соответствует закону Кулона. Зависимости $E(r)$, подобные приведенным в формулах (2.4) и (2.5), характерны для напряженности поля равномерно заряженного шара радиуса R , где граничной точкой является $r = R$. Как и в случае заряженного шара, определяемая по формуле (2.4) напряженность поля $E \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$, т. е. в центре системы зарядов с данной плотностью $\rho(r)$ практически отсутствует электрическое поле.

Задача 2.3. Два диэлектрических шарика с одинаковыми массами и радиусами подвешены на тонких нитях одинаковой длины. После сообщения каждому шарiku одинакового заряда в воздухе шари-

ки разошлись на угол $2\alpha_{\text{ш}}$. После погружения данных заряженных шариков на нитях в жидкость с плотностью $\rho_{\text{ж}}$ и диэлектрической проницаемостью $\epsilon_{\text{ж}}$ шарики разошлись на угол $2\alpha_{\text{ж}}$. Найти плотность шарика $\rho_{\text{ш}}$, если его диэлектрическая проницаемость равна $\epsilon_{\text{ш}}$.

Ответ:

$$\rho_{\text{ш}} = \rho_{\text{ж}} \epsilon_{\text{ж}} \sin^2 \alpha_{\text{ж}} \operatorname{tg} \alpha_{\text{ж}} / (\epsilon_{\text{ж}} \sin^2 \alpha_{\text{ж}} \operatorname{tg} \alpha_{\text{ж}} - \epsilon_{\text{ш}} \sin^2 \alpha_{\text{ш}} \operatorname{tg} \alpha_{\text{ш}}). \quad (2.6)$$

Как видно из выражения (2.6), плотность шарика $\rho_{\text{ш}} > 0$ при условиях $\operatorname{tg} \alpha_{\text{ж}} > 0$ (т. е. угол $\alpha_{\text{ж}} > 0$, поскольку одноименно заряженные шарики отталкиваются) и $\epsilon_{\text{ж}} \sin^2 \alpha_{\text{ж}} \operatorname{tg} \alpha_{\text{ж}} > \epsilon_{\text{ш}} \sin^2 \alpha_{\text{ш}} \operatorname{tg} \alpha_{\text{ш}}$. Последнее неравенство эквивалентно условию $\epsilon_{\text{ж}} / \epsilon_{\text{ш}} > \sin^2 \alpha_{\text{ш}} \operatorname{tg} \alpha_{\text{ш}} / (\sin^2 \alpha_{\text{ж}} \operatorname{tg} \alpha_{\text{ж}})$, а неравенство $\sin^2 \alpha_{\text{ш}} \operatorname{tg} \alpha_{\text{ш}} / (\sin^2 \alpha_{\text{ж}} \operatorname{tg} \alpha_{\text{ж}}) > 0$ справедливо, если углы $\alpha_{\text{ш}} > 0$ и $\alpha_{\text{ж}} > 0$, т. е. при отталкивании данных заряженных шариков в любой диэлектрической среде.

Если углы отклонения $\alpha_{\text{ш}} = \alpha_{\text{ж}} > 0$, то $\epsilon_{\text{ж}} / \epsilon_{\text{ш}} > 1$, а формула (2.6) приобретает более простой вид: $\rho_{\text{ш}} = \rho_{\text{ж}} \epsilon_{\text{ж}} / (\epsilon_{\text{ж}} - \epsilon_{\text{ш}})$. При этом следует помнить, что погружение незаряженных шариков в жидкость означает $\rho_{\text{ш}} / \rho_{\text{ж}} > 1$. В данном случае это неравенство выполняется при условии $\epsilon_{\text{ж}} / (\epsilon_{\text{ж}} - \epsilon_{\text{ш}}) > 1$, которое сводится к вышеупомянутому неравенству $\epsilon_{\text{ж}} / \epsilon_{\text{ш}} > 1$.

Задача 2.4 ([2], № 2.69). Тонкое проволочное кольцо радиуса $R = 7,5$ см имеет заряд $q = 5,2$ мкКл. Кольцо расположено параллельно проводящей плоскости на расстоянии $l = 6,0$ см от нее. Найти поверхностную плотность заряда в точке плоскости, расположенной симметрично относительно кольца.

Ответ:

$$\sigma = ql / [2\pi (l^2 + R^2)^{3/2}] = 70 \text{ нКл} / \text{м}^2. \quad (2.7)$$

Выражение (2.7) целесообразно сравнить с формулой поверхностной плотности σ' заряда, обусловленной действием некоторого точечного заряда на проводящую плоскость. В предельном случае, когда $R \rightarrow 0$ (т. е. заряд q является точечным), поверхностная плотность

$$\sigma' \rightarrow q / (2\pi l^2). \quad (2.8)$$

Из формулы (2.8) видно, что размерность поверхностной плотности зарядов тесно связана с размерностью напряженности электрического поля. Как известно, поверхностная плотность зарядов вблизи бесконечной плоскости определяется по формуле $\sigma = 2E\epsilon_0$. Сравнивая последнее выражение с формулой (2.8), нетрудно получить следующее выражение для напряженности поля E' , создаваемого точечным зарядом q : $E' \rightarrow q / (4\pi\epsilon_0 l^2)$. При $l \ll R$ выражение (2.7) преобразуется к виду

$$\sigma'' \rightarrow ql / (2\pi R^3). \quad (2.9)$$

В предельном случае $l \rightarrow 0$, как следует из формулы (2.9), мы получим поверхностную плотность $\sigma'' \rightarrow 0$, не зависящую от радиуса кольца R . Это свидетельствует о том, что в данной системе индуцированных зарядов не возникает, а заряды с кольца при соприкосновении с плоскостью ($l = 0$) распределяются по ее поверхности.

Задача 2.5 ([2], № 2.102). Точечный заряд q находится на плоскости, отделяющей вакуум от безграничного однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью ϵ . Найти модули векторов \mathbf{D} и \mathbf{E} и потенциал ϕ как функции расстояния r от заряда q .

Ответ:

$$D = q / [2\pi (1 + \epsilon) r^2] \text{ в вакууме}; \quad (2.10)$$

$$D = \epsilon q / [2\pi (1 + \epsilon) r^2] \text{ в диэлектрике}; \quad (2.11)$$

$$E = q / [2\pi\epsilon_0 (1 + \epsilon) r^2] \text{ всюду}; \quad (2.12)$$

$$\phi = q / [2\pi\epsilon_0 (1 + \epsilon) r] \text{ всюду}. \quad (2.13)$$

Как видно из выражений (2.10)–(2.13), имеют место зависимости $D \sim 1 / r^2$, $E \sim 1 / r^2$ и $\phi \sim 1 / r$, характерные для электростатического поля точечного заряда и коррелирующие с законом Кулона. Подстановка в формулы (2.10) и (2.11) диэлектрической проницаемости $\epsilon = 1$ (т. е. замена однородного диэлектрика вакуумом) приводит к равенству выражений (2.10) и (2.11): в этом случае $D = q / (4\pi r^2)$. Выражение (2.12) при подстановке в него величины $\epsilon = 1$ принимает вид $E = q / (4\pi\epsilon_0 r^2)$. Последнее выражение для E характеризует напряженность электрического поля точечного заряда в вакууме.

Предельный переход $\epsilon \rightarrow \infty$ (т. е. замена диэлектрика проводящей средой) вызывает обращение в нуль выражений (2.10), (2.12) и (2.13) при любом $r > 0$. Кроме того, появляется неопределенность типа « ∞ / ∞ » в формуле (2.11), и в этом случае не имеет смысла говорить об электрическом смещении D в данной среде.

Задача 2.6 ([2], № 2.115). Найти емкость сферического конденсатора, радиусы обкладок которого a и b , причем $a < b$, если пространство между обкладками заполнено диэлектриком:

а) проницаемости ϵ ;

б) проницаемость которого зависит от расстояния r до центра конденсатора как $\epsilon = \alpha / r$, где α — постоянная.

Ответ:

$$\text{а) } C = 4\pi\epsilon_0 \epsilon a b / (b - a); \quad (2.14)$$

$$\text{б) } C = 4\pi\epsilon_0 \alpha / \ln(b / a). \quad (2.15)$$

Действия с наименованиями показывают, что выражения (2.14) и (2.15) приводят к $[C] = \Phi$, причем коэффициент $\alpha = \epsilon r$, фигурирующий в (2.15), выражается в единицах длины. Легко убедиться и в том, что согласно (2.15) емкость $C \sim \epsilon$. Определенный интерес представляют пути повышения емкости C данного сферического конденсатора. Например, при $\epsilon = \text{const}$ в формулах (2.14) и (2.15) важно уменьшить знаменатель, т. е. обеспечить выполнение условия $b - a \ll \ll a$ за счет уменьшения расстояния между обкладками конденсатора. Несомненно, емкость C возрастает и при увеличении ϵ . В этом случае, согласно формуле (2.15), предполагается увеличение коэффициента $\alpha \sim \epsilon \sim C$.

Задача 2.7 ([2], № 2.150). Внутри плоского конденсатора находится параллельная обкладкам пластина, толщина которой составляет $\eta = 0,60$ расстояния между обкладками. Емкость конденсатора в отсутствие пластины $C = 20$ нФ. Конденсатор сначала подключили к источнику постоянного напряжения $U = 200$ В, затем отключили и после этого медленно извлекли пластину из зазора. Найти работу, совершенную против электрических сил при извлечении пластины, если она:

а) металлическая;

б) стеклянная.

Ответ:

$$\text{а) } A = C U^2 \eta / [2(1 - \eta)^2] = 1,5 \text{ мДж}; \quad (2.16)$$

$$\text{б) } A = C U^2 \eta \epsilon (\epsilon - 1) / [2(\epsilon - \eta(\epsilon - 1))^2] = 0,8 \text{ мДж}. \quad (2.17)$$

Из выражений (2.16) и (2.17) более общим, несомненно, является (2.17). Случай нахождения внутри конденсатора некоторой диэлектрической пластины и ее дальнейшего извлечения из зазора предполагает анализ формулы (2.17) при различных значениях параметра η и диэлектрической проницаемости ϵ пластины.

Например, при бесконечно малой толщине пластины ($\eta \rightarrow 0$) с некоторой диэлектрической проницаемостью $\epsilon = \text{const}$ из (2.17) следует, что $A \rightarrow 0$. Иначе говоря, не требуется совершать работу против электрических сил и отсутствуют причины их появления. При толщине пластины, практически совпадающей с расстоянием между обкладками ($\eta \rightarrow 1$), из выражения (2.17) следует, что $A \rightarrow C U^2 \epsilon (\epsilon - 1) / 2$, т. е. работа A является квадратичной функцией диэлектрической проницаемости ϵ пластины. При изменении ϵ и постоянной толщины пластины (т. е. $\eta = \text{const}$) выражение (2.17) принимает вид

$$A \rightarrow 0, \text{ если } \epsilon \rightarrow 1; \quad (2.18)$$

$$A \rightarrow C U^2 \eta / [2(1 - \eta)^2], \text{ если } \epsilon \rightarrow \infty. \quad (2.19)$$

При этом формула (2.19) совпадает с известным результатом (2.16) для случая (а) данной задачи, т. е. когда из зазора извлекается металлическая пластина. Примечательно, что работа $A \rightarrow 0$ в (2.18) имеет место при практическом равенстве диэлектрических проницаемостей среды и пластинки и, следовательно, при практически одинаковой «густоте» силовых линий электрического поля E в зазоре конденсатора и пластине.

2.2. Постоянный электрический ток

Задача 2.8 ([2], № 2.163). Пространство между двумя проводящими концентрическими сферами, радиусы которых a и b ($a < b$), заполнено однородной слабопроводящей средой. Емкость такой систе-

мы равна C . Найти удельное сопротивление среды, если разность потенциалов между сферами, отключенными от внешнего напряжения, уменьшается в η раз за время Δt .

Ответ:

$$\rho = 4\pi \Delta t a b / [(b - a) C \ln \eta]. \quad (2.20)$$

Анализ соотношения (2.20) может быть связан с рассмотрением роли емкости C сферического конденсатора (см. задачу 2.6), определяемой радиусами обкладок a и b ($a < b$). Простая подстановка выражения (2.14) в (2.20) приводит к формуле

$$\rho' = \Delta t / (\epsilon_0 \epsilon \ln \eta), \quad (2.21)$$

где ϵ — диэлектрическая проницаемость однородной изотропной среды между обкладками. Пусть между обкладками имеет место вакуум ($\epsilon = 1$). В этом случае формула (2.21) принимает вид $\rho' = \Delta t / (\epsilon_0 \ln \eta)$, причем удельное сопротивление достигает наибольшего значения. При $\epsilon \rightarrow \infty$ среда между обкладками становится проводником (т. е. конденсатор замыкается накоротко), а $\rho' \rightarrow 0$ согласно (2.21). Однако это не означает уменьшения удельного сопротивления среды практически до нуля, свойственного при определенных условиях сверхпроводникам, а свидетельствует о количественном изменении условия задачи. Следует вспомнить, что удельное сопротивление любого диэлектрика на несколько порядков превышает удельное сопротивление проводника.

Задача 2.9 ([2], № 2.174). Зазор между обкладками плоского конденсатора заполнен последовательно двумя диэлектрическими слоями 1 и 2 толщиной d_1 и d_2 с проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 и удельными сопротивлениями ρ_1 и ρ_2 . Конденсатор находится под постоянным напряжением U , причем электрическое поле направлено от слоя 1 к слою 2. Найти σ — поверхностную плотность сторонних зарядов на границе раздела диэлектрических слоев и условие, при котором $\sigma = 0$.

Ответ:

$$\sigma = \epsilon_0 U (\epsilon_2 \rho_2 - \epsilon_1 \rho_1) / (\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2); \quad (2.22)$$

$$\sigma = 0 \text{ при } \varepsilon_2 \rho_2 = \varepsilon_1 \rho_1. \quad (2.23)$$

Рассмотрим следующие предельные случаи: $d_1 \gg d_2$ (толщины слоев существенно различаются), $\rho_1 \gg \rho_2$ (удельные сопротивления слоев существенно различаются) и $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_2$ (диэлектрические проницаемости слоев существенно различаются). При $d_1 \gg d_2$ выражение (2.22) принимает вид

$$\sigma' = \varepsilon_0 U [\varepsilon_2(\rho_2 / \rho_1) - \varepsilon_1] / d_1, \quad (2.24)$$

при $\rho_1 \gg \rho_2$ выражение (2.22) записывается как

$$\sigma'' = -\varepsilon_0 U \varepsilon_1 / d_1, \quad (2.25)$$

а при $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_2$ выражение (2.22) представляется в виде

$$\sigma''' = -\varepsilon_0 U \varepsilon_1 / [d_1 + (\rho_2 / \rho_1) d_2]. \quad (2.26)$$

Нетрудно проверить, что выражение (2.24) совпадает с формулой (2.23) при равенстве $\varepsilon_2 \rho_2 = \varepsilon_1 \rho_1$. Переход от формулы (2.26) к (2.25) также очевиден, если дополнительно допустить, что входящие в выражение (2.26) удельные сопротивления слоев ρ_i удовлетворяют неравенству $\rho_1 \gg \rho_2$. В этом случае наблюдается зависимость $\sigma''(d_1)$ от толщины одного из слоев (ср. формулы (2.25) и (2.26)).

Как видно из условия (2.23), основную роль в компенсации зарядов на плоской границе диэлектрических слоев играют величины вида $\varepsilon_i \rho_i$. Подобная взаимосвязь диэлектрических и резистивных свойств материала прослеживалась ранее и в формуле (2.21) из задачи 2.8. Если отвлечься от геометрии конденсатора из задачи 2.8, то выражение (2.21) можно записать в общем виде как $\varepsilon \rho = f(\Delta t, \eta)$, где аргументы Δt и η характеризуют процессы утечки зарядов в однородной слабо проводящей среде между обкладками конденсатора. Условие $\varepsilon_2 \rho_2 = \varepsilon_1 \rho_1$ из (2.23) демонстрирует связь между подобными процессами и соответствующими параметрами (Δt_i , η_i) в случае двухслойных слабо проводящих сред.

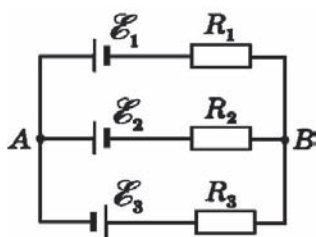


Рисунок 8 – К задаче 2.10

Ответ:

Задача 2.10 ([2], № 2.191).
В схеме (рисунок 8) $\mathcal{E}_1 = 1,5$ В, $\mathcal{E}_2 = 2,0$ В, $\mathcal{E}_3 = 2,5$ В, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 30$ Ом. Внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы. Найти:

а) ток через сопротивление R_1 ;

б) разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$ между точками А и В.

$$\text{а) } I_1 = [R_3(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) + R_2(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3)] / (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1) = 0,06 \text{ А}; \quad (2.27)$$

$$\text{б) } \varphi_A - \varphi_B = \mathcal{E}_1 - I_1 R_1 = 0,9 \text{ В}. \quad (2.28)$$

Простейшая проверка формулы (2.27) может быть связана с исключением из схемы (рисунок 8) ЭДС \mathcal{E}_2 , \mathcal{E}_3 и резисторов R_2 , R_3 . В этом случае (2.27) принимает вид $I_1 = \mathcal{E}_1 / R_1$, что соответствует закону Ома для участка цепи. При исключении из схемы ЭДС \mathcal{E}_2 , \mathcal{E}_3 и резисторов R_2 , R_3 выражение (2.28) принимает вид $\varphi_A = \varphi_B$, поскольку на участке АВ в этом случае не будет ни ЭДС, ни резисторов. Присутствие же на участке АВ достаточно высокого сопротивления ($R_2 \gg R_1$ и $R_2 \gg R_3$, см. рисунок 8) приводит к упрощению выражения (2.27): оно принимает вид $I_1 = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3) / (R_1 + R_3)$. Это выражение коррелирует с законом Ома для участка цепи и не зависит от ЭДС \mathcal{E}_2 (т. е. проявляется эффект размыкания цепи на участке АВ вследствие высокого сопротивления R_2).

Следует обратить внимание еще на одно следствие из формулы (2.27). Исключение из цепи резистора R_1 (т. е. подстановка в формулы $R_1 = 0$) не приводит к току короткого замыкания на участке $\mathcal{E}_1 B$, где находился резистор R_1 . Избежать короткого замыкания удастся благодаря присутствию в цепи других резисторов — R_2 и R_3 (см. рисунок 8). Соответствующая формула силы тока на участке $\mathcal{E}_1 B$ при $R_1 = 0$ принимает вид

$$I_1' = (R_3 / R_2)(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) + (R_2 / R_3)(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3). \quad (2.29)$$

Изменение баланса между оставшимися в цепи сопротивлениями R_3 и R_2 может привести к значительному возрастанию силы тока I_1' из (2.29). Для этого достаточно, например, выполнить условие $R_3 \ll R_2$.

Задача 2.11 ([4], № 3.197). Имеется проводник, у которого известны сопротивление R , не зависящее от температуры, и общая теплоемкость C . В момент $t = 0$ его подключили к постоянному напряжению. Найти зависимость от времени температуры T проводника, считая, что тепловая мощность, отдаваемая им в окружающее пространство, $q = k(T - T_0)$, где k — постоянная, T_0 — температура окружающей среды (она же и температура проводника в начальный момент).

Ответ:

$$T - T_0 = [1 - \exp(-kT / C)]U^2 / (kR). \quad (2.30)$$

С учетом выражения (2.30) тепловая мощность представляется в виде

$$q = k(T - T_0) = [1 - \exp(-kT / C)]U^2 / R. \quad (2.31)$$

Проанализируем поведение тепловой мощности из (2.31) при различных предельных переходах. Предельный переход $\exp(-kT / C) \rightarrow 0$ (т. е. $kT / C \rightarrow \infty$) в формуле (2.31) приводит к известному выражению $q' = U^2 / R$, описывающему тепловую мощность, выделяемую на резисторе R при подключении к источнику постоянного напряжения U . Ввиду конечности величин T и k подобный тепловой эффект может иметь место при теплоемкости $C \rightarrow 0$, т. е. в адиабатическом приближении. Другой предельный переход $\exp(-kT / C) \rightarrow 1$ в (2.31) вызывает $q \rightarrow 0$, что может быть связано с условиями $C \rightarrow \infty$ и $T \rightarrow T_0$, соответствующими изотермическому приближению.

2.3. Магнитное поле тока

Задача 2.12 ([5], пример 10.1, с. 70). Определить индукцию магнитного поля, создаваемого конечным прямолинейным участком проводника длиной l , по которому течет ток I (рисунок 9).

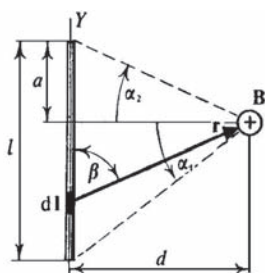


Рисунок 9 – К задаче 2.12

Ответ:

$$B = I (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) \mu_0 / (4\pi d). \quad (2.32)$$

При выводе формулы (2.32) следует вспомнить, что индукция магнитного поля B , создаваемого проводником (рисунок 9), пропорциональна силе тока I и обратно пропорциональна расстоянию d . При одновременном равенстве углов $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi / 2$ из (2.32) следует, что

$$B = 2 I \mu_0 / (4\pi d). \quad (2.33)$$

Выражение (2.33) описывает индукцию магнитного поля на расстоянии d от бесконечно длинного тонкого прямого проводника. Подобное рассмотрение формулы (2.32) и предельных случаев изложено кратко в методическом пособии [6] (см. задачу 3.1.1 на с. 76–77).

Задача 2.13 ([7], № 297). Бесконечно длинный цилиндрический провод (рисунок 10) состоит из двух коаксиальных цилиндров: центрального сплошного цилиндра радиуса R_1 , сделанного из материала с удельным сопротивлением ρ_1 , и окружающего его полого цилиндра с внешним радиусом R_2 , изготовленного из материала с удельным сопротивлением ρ_2 . Внешняя поверхность сплошного и внутренняя поверхность полого цилиндров находятся в электрическом контакте.

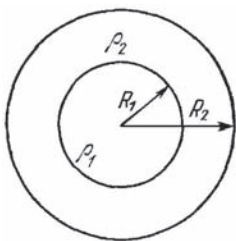


Рисунок 10 – К задаче 2.13

По проводу параллельно его оси течет постоянный ток I . Найти выражения для напряженности магнитного поля H внутри и вне проводов.

Ответ (в системе СГСЭ):

$$H = 2 I \rho_2 r / (cA), \text{ если } r \leq R_1; \quad (2.34)$$

$$H = 2I [\rho_1(r^2 - R_1^2) + \rho_2 R_1^2] / (cAr), \text{ если } R_1 \leq r \leq R_2; \quad (2.35)$$

$$H = 2I / (cr), \text{ если } r \geq R_2, \quad (2.36)$$

где

$$A = \rho_1(R_2^2 - R_1^2) + \rho_2 R_1^2. \quad (2.37)$$

Если считать центральный цилиндр на рисунке 10 бесконечно тонким, то формулы (2.34)–(2.37) заметно упростятся после подстановки $R_1 = 0$ и изменений выражения A из (2.37). В этом случае имеем $A' = \rho_1 R_2^2$ и

$$H' = 2 I r / (c R_2^2), \text{ если } 0 \leq r \leq R_2; H' = 2I / (cr), \text{ если } r \geq R_2.$$

Очевидно, приведенные выше формулы H' легко переходят друг в друга (т. е. «сшиваются») на границе $r = R_2$.

Другое преобразование формул (2.34)–(2.37) может быть связано с соотношением между удельными сопротивлениями ρ_i . Например, при $\rho_1 \ll \rho_2$ и конечном радиусе $0 < R_1 < R_2$ из формулы (2.37) получаем $A'' = \rho_2 R_1^2$ и

$$H'' = 2Ir / (c R_1^2), \text{ если } 0 \leq r \leq R_1; H'' = 2I / (cr), \text{ если } r \geq R_1.$$

Анализ приведенных формул H'' показывает, что при $\rho_1 \ll \rho_2$ не представляет интереса интервал $R_1 \leq r \leq R_2$ (как было ранее в формуле (2.35)). Такое поведение $H''(r)$ может быть связано с очень большим удельным сопротивлением ρ_2 и практическим отсутствием тока I во внешнем полой цилиндре (ток будет течь преимущественно по внутреннему цилиндру с удельным сопротивлением $\rho_1 \ll \rho_2$, см. рисунок 10). Таким образом, внешний полой цилиндр перестает быть источником магнитного поля и при любых расстояниях $r \geq R_1$ следует учитывать только магнитное поле H'' , создаваемое внутренним цилиндром.

Задача 2.14 ([6], № 5.5, с. 81). Вычислите индукцию магнитного поля на оси короткого однослойного соленоида с током I , на единицу длины которого приходится n витков. Радиус соленоида R , его длина l . Рассмотрите наиболее интересные частные случаи.

Ответ:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot 2\pi n I}{4\pi} \left\{ \frac{l+2z}{[(l+2z)^2 + (2R)^2]^{1/2}} - \frac{l-2z}{[(l-2z)^2 + (2R)^2]^{1/2}} \right\}. \quad (2.38)$$

В выражении (2.38) индукция магнитного поля $B = B(z)$ представлена как функция координаты z , определяемой вдоль оси OZ прямоугольной системы координат (XYZ) . Эта ось совпадает с осью симметрии соленоида. Следует помнить, что на оси OZ также располагаются центры симметрии всех витков соленоида. Из формулы (2.38) следует, что $B(z) = B(-z)$. Точка $z = 0$ соответствует центру симметрии рассматриваемого соленоида, а индукция магнитного поля в этой точке согласно (2.38) равна

$$B' = \mu_0 n I l / [l^2 + (2R)^2]^{1/2}. \quad (2.39)$$

Дальнейший переход $R \rightarrow 0$ в (2.39) приводит к соотношению $B' \rightarrow \mu_0 n I$, служащему для определения индукции магнитного поля внутри бесконечно длинного соленоида. Отсюда ясно, что условие задачи, сформулированное для короткого соленоида (т. е. при конечных соизмеримых значениях R и l), может быть модифицировано и распространено на случай $l \gg R$. При $l \ll R$ из выражения (2.39) следует, что $B' \rightarrow 0$. Действительно, даже в случае единственного кольцевого контура вместо соленоида магнитное поле в центре этого контура стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$.

При удалении на большие расстояния вдоль оси OZ от центра соленоида индукция магнитного поля $B(z)$ из формулы (2.38) заметно убывает, а в пределе $z \rightarrow \pm\infty$ индукция $B(z) \rightarrow 0$. Полученный результат не зависит от величин R и l или от их отношения, но предполагает сохранение конечных значений R и l в выражении (2.38).

Наконец, точки с координатами $z = \pm l$ соответствуют крайнему витку тока на одной из торцевых поверхностей соленоида. В этом случае выражение (2.38) для индукции магнитного поля преобразуется к виду

$$B'' = \mu_0 n I l / [2(l^2 + R^2)^{1/2}]. \quad (2.40)$$

Предельный переход $R \rightarrow 0$ в формуле (2.40) позволяет определить индукцию магнитного поля у конца полубесконечного соленоида следующим образом: $B'' \rightarrow \mu_0 n I / 2$.

2.4. Электромагнитная индукция

Задача 2.15 ([2], № 2.318). Квадратная рамка со стороной a и длинный прямой провод с током I находятся в одной плоскости (рисунок 11). Рамку поступательно перемещают вправо с постоянной скоростью v . Найти ЭДС индукции в рамке как функцию расстояния x .

Ответ:

$$\mathcal{E}_i = (\mu_0 I a^2 v) / [2\pi x (x + a)]. \quad (2.41)$$

Сначала убедимся в корректности единиц измерения в формуле (2.41): ЭДС индукции $[\mathcal{E}_i] = (\text{Гн} / \text{м}) \cdot \text{А} \cdot \text{м}^2 \times (\text{м} / \text{с}) / \text{м}^2 = \text{В}$. Далее обратим внимание на линейные размеры a (параметр) и x (переменная), используемые в задаче: их изменения существенно влияют на величину ЭДС \mathcal{E}_i из (2.41). Например, $x \rightarrow 0$ приводит к $\mathcal{E}_i \rightarrow \infty$ при $a = \text{const}$, а возрастание длины a вызывает увеличение \mathcal{E}_i при $x = \text{const}$. Исчезновение квадратной рамки или вытягивание ее в вертикальную линию (т. е. $a \rightarrow 0$) приводит к $\mathcal{E}_i \rightarrow 0$, поскольку при этом отсутствует изменение магнитного потока со временем.

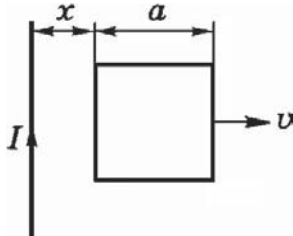


Рисунок 11 – К задаче 2.15

Сначала убедимся в корректности единиц измерения в формуле (2.41): ЭДС индукции $[\mathcal{E}_i] = (\text{Гн} / \text{м}) \cdot \text{А} \cdot \text{м}^2 \times (\text{м} / \text{с}) / \text{м}^2 = \text{В}$. Далее обратим внимание на линейные размеры a (параметр) и x (переменная), используемые в задаче: их изменения существенно влияют на величину ЭДС \mathcal{E}_i из (2.41). Например, $x \rightarrow 0$ приводит к $\mathcal{E}_i \rightarrow \infty$ при $a = \text{const}$, а возрастание длины a вызывает увеличение \mathcal{E}_i при $x = \text{const}$. Исчезновение квадратной рамки или вытягивание ее в вертикальную линию (т. е. $a \rightarrow 0$) приводит к $\mathcal{E}_i \rightarrow 0$, поскольку при этом отсутствует изменение магнитного потока со временем.

Задача 2.16 ([6], № 5.1, с. 122). Прямоугольная рамка размером $a \times b$ вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 вокруг стороны, отстоящей на расстоянии $c > a$ от бесконечно длинного прямолинейного проводника, по которому течет ток I_0 . Найдите ЭДС индукции \mathcal{E}_i в рамке.

Ответ:

$$\mathcal{E}_i = \frac{\mu_0 I_0 b}{2\pi} \cdot \frac{\ln(1 + \frac{a \cos \omega_0 t}{c})}{1 + \frac{a \cos \omega_0 t}{c}} \cdot \frac{a \omega_0}{c} \cdot \sin \omega_0 t. \quad (2.42)$$

Прежде всего обратим внимание на роль геометрического фактора в выражении (2.42). При стремлении к нулю хотя бы одного из линейных размеров рамки (т. е. $a \rightarrow 0$ и/или $b \rightarrow 0$) при достаточно большом ее удалении от проводника (т. е. $c \gg a$) ЭДС индукции $\mathcal{E}_i \rightarrow 0$. В первом случае это связано с нарушением условия изменения магнитного потока Φ при пересечении силовых линий магнитного поля рамкой, поскольку рамка вырождается в прямолинейный проводник. Во втором случае $c \rightarrow \infty$, что приводит к индукции магнитного поля $B \rightarrow 0$, а следовательно, и $\Phi \rightarrow 0$ ввиду отдаленности источника магнитного поля (проводника с током).

Как и в задаче 2.15, ЭДС индукции $\mathcal{E}_i \sim I_0$, (ср. формулы (2.42) и (2.41)), и с исчезновением тока I_0 невозможно появление ЭДС индукции в рамке.

Далее при анализе соотношения (2.42) следует вспомнить математическую формулу $\ln(1+x) \approx x$, справедливую при $x \rightarrow 0$. Применительно к выражению (2.42) предельный переход, аналогичный $x \rightarrow 0$, означает

- 1) связь между геометрическими параметрами $a/c \rightarrow 0$ или
- 2) временное условие $\cos\omega_0 t \rightarrow 0$, т. е.

$$\omega_0 t \rightarrow (2m+1)\pi/2, \text{ где } m = 0; 1; 2; \dots \quad (2.43)$$

В обоих случаях ЭДС индукции $\mathcal{E}_i \rightarrow 0$, причем формула (2.43) показывает, в какие моменты времени это происходит.

Наконец, аргумент логарифмической функции из (2.42) должен удовлетворять условию

$$\cos\omega_0 t > -c/a. \quad (2.44)$$

Из тригонометрии известно, что $0 \leq |\cos\omega_0 t| \leq 1$, а по условию задачи $c > a$. Дальнейший анализ показывает, что условие (2.44) не противоречит предшествующим выводам.

Задача 2.17 ([6], № 5.8, с. 124). Конденсатор емкостью C присоединен к верхним концам двух параллельных медных шин, расположенных вертикально на расстоянии l друг от друга. Однородное магнитное поле \mathbf{B} направлено перпендикулярно к плоскости шин. Касаясь шин, без трения падает проводник массы m . Найдите ускорение

проводника a и силу тока, заряжающего конденсатор, I , если сопротивлением и самоиндукцией проводников можно пренебречь. Начальная скорость проводника равна нулю.

Ответ:

$$a = g / [1 + (B^2 l C / m)]; \quad (2.45)$$

$$I = g B l C / [1 + (B^2 l^2 C / m)]. \quad (2.46)$$

В выражениях (2.45) и (2.46) важно выделить роль величин B , l и C , выступающих в роли сомножителей. Обращение хотя бы одной из этих величин в нуль привело бы к свободному падению проводника ($a \rightarrow g$) и отсутствию тока в цепи ($I \rightarrow 0$). Такой сценарий наблюдался бы либо при выключении магнитного поля B , либо при слиянии параллельных шин, связанных с противоположными по знаку обкладками конденсатора, либо при резком уменьшении его емкости C . В любом из этих случаев не происходило бы превращения механической энергии в электромагнитную. Кроме того, $I \rightarrow 0$ наблюдалось бы и при уменьшении массы проводника $m \rightarrow 0$.

При достаточно большой массе проводника, когда выполняется условие $m \gg B^2 l^2 C$ и можно пренебречь деформациями проводящих шин, из формулы (2.45) снова получаем ускорение проводника $a \rightarrow g$. Однако при этом сила тока стремится к наибольшей величине: $I \rightarrow g B l C$. В соответствии с формулой (2.46) это означает наиболее благоприятные условия для зарядки конденсатора и перехода энергии из механической формы в электромагнитную.

Задача 2.18 ([6], № 5.10, с. 124). В условии задачи 2.17 вместо конденсатора шины замкнуты на сопротивление R . Найдите закон движения проводника вдоль шин.

Ответ:

$$x(t) = \frac{mR}{B^2 l^2} g t [1 - \exp(-\frac{B^2 l^2 t}{mR})]. \quad (2.47)$$

Выражение (2.47) содержит несколько механических и электромагнитных величин, и в такой ситуации целесообразно начать анализ закона движения с проверки размерности величин. Из механики из-

известно, что координата тела, движущегося в поле тяжести, $x \sim gt^2$. Поэтому из соображений размерности в формуле (2.47) должно быть $mR \sim B^2 l^2 t$. Обратим внимание, что такая связь между величинами в (2.47) встречается дважды. Проверка единиц измерения показывает следующее: $[mR] = \text{кг} \cdot \text{Ом}$; $[B^2 l^2 t] = \text{Тл}^2 \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с} = (B^2 \text{с} / \text{м}^2)^2 \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с} = B^2 \cdot \text{с} / (\text{м} / \text{с})^2 = (\text{Дж} / \text{А}) \cdot \text{В} / (\text{м} / \text{с})^2 = \text{кг} \cdot \text{Ом}$.

Зависимость (2.47) может быть упрощена в следующих случаях. В первом случае предположим $\exp[-B^2 l^2 t / (mR)] \rightarrow 0$ и соответственно $mR = \alpha B^2 l^2 t$, где $\alpha \ll 1$. Тогда из формулы (2.47) мы получаем $x(t) = \alpha g t^2$, что соответствует движению проводника с достаточно малым ускорением. Такое движение может быть обусловлено относительно небольшой массой проводника m и/или его небольшим сопротивлением R .

Во втором случае мы полагаем $\exp[-B^2 l^2 t / (mR)] \rightarrow 1$ и $mR = A B^2 l^2 t$, где $A \gg 1$. Анализ формулы (2.47) при данных допущениях показывает, что проводник может двигаться с ускорением, близким к g , при достаточно большой массе m или значительном сопротивлении R .

Наконец, сравнение данного анализа ответа с анализом ответов задачи 2.17 позволяет определить различия между процессами превращения энергии в системе с конденсатором и в системе с сопротивлением.

3. Колебания и волны

Изучение раздела “Колебания и волны” в курсе физики сопровождается решением разнообразных задач и открывает новые возможности анализа получаемых ответов. Тесные связи этого раздела с разделами “Механика” и “Электричество и магнетизм”, понимание закономерностей превращения энергии, импульса и момента импульса должны способствовать успешному усвоению теоретического материала при решении задач и физическом осмыслении ответов. Ниже приводятся некоторые примеры анализа ответов ряда задач из раздела “Колебания и волны”.

3.1. Механические колебания

3.1.1. Колебания систем с одной степенью свободы

Задача 3.1 ([2], № 3.16). Определить период малых колебаний шарика, подвешенного на нерастяжимой нити длины $l = 20$ см, если он находится в жидкости, плотность которой в $\eta = 3,0$ раза меньше плотности шарика.

Ответ:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\eta l}{g(\eta - 1)}}. \quad (3.1)$$

По условию задачи коэффициент $\eta = \rho_{\text{ш}} / \rho_{\text{ж}}$ представляет собой отношение плотностей шарика $\rho_{\text{ш}}$ и жидкости $\rho_{\text{ж}}$. Далее целесообразно рассмотреть случаи $\eta \gg 1$ и $\eta \ll 1$.

При $\eta \gg 1$ формула (3.1) переходит в формулу Гюйгенса $T_0 = 2\pi \sqrt{l/g}$ для определения периода гармонических колебаний математического маятника. Предполагается, что шарик имеет пренебрежимо малый радиус, а также отсутствует сопротивление жидкой среды, в которой движется шарик.

При $\eta \ll 1$ подкоренное выражение в (3.1) становится отрицательным, и период колебаний T данной системы определить не удастся. В соответствии с условием плавания однородного шарика с плотностью $\rho_{\text{ш}} = \text{const}$ он будет находиться на поверхности жидкости. Действительно, сила Архимеда, действующая на шарик объемом $V_{\text{ш}}$ при его полном погружении, равна $F_A = \rho_{\text{ж}} V_{\text{ш}} g = m_{\text{ш}} g / \eta$ и оказыва-

ется значительно больше силы тяжести $F_T = m_{\text{ш}}g$, действующей на шарик.

Задача 3.2 ([2], № 3.18). Шарик подвесили на нити длины l к точке O стенки, составляющей небольшой угол α с вертикалью (рисунок 12). Затем нить с шариком отклонили на небольшой угол $\beta > \alpha$ и отпустили. Считая удар шарика о стенку абсолютно упругим, найти период колебаний такого маятника.

Ответ:

$$T = 2\pi\sqrt{l/g} [(\pi/2) + \arcsin(\alpha/\beta)]. \quad (3.2)$$

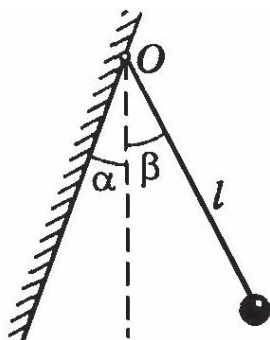


Рисунок 12 – К задаче 3.2

Как следует из условия задачи, углы α и β (рисунок 12) являются небольшими, что позволяет считать колебания шарика гармоническими. При изменениях углов возможны следующие изменения периода колебаний T из выражения (3.2).

Случай $\alpha \ll \beta$ соответствует условию $\arcsin(\alpha/\beta) \ll 1$. Тогда из формулы (3.2) следует $T \rightarrow \pi\sqrt{l/g}$.

При абсолютно упругом ударе шарика о стенку (она показана штриховкой в левой части рисунка 12) можно ожидать его колебаний с периодом $T \approx T_0/2$, где T_0 — период колебаний математического маятника (см. формулу Гюйгенса в анализе ответа к задаче 3.1). При этом предполагается, что выполняется условие $\beta \ll 1$ рад.

Пусть теперь отношение углов α/β представляется в виде $\alpha/\beta = 1 - \delta$, где $\delta \ll 1$. Тогда входящее в формулу (3.2) слагаемое $\arcsin(\alpha/\beta)$ записывается при условии $\delta^n \rightarrow 0$ ($n = 2; 3; \dots$) в виде

$$\arcsin(\alpha/\beta) = \arcsin(1 - \delta) = 1 - \delta + \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 - \delta)^2}{3} + \dots \approx \frac{7}{6} - \frac{4\delta}{3},$$

а период колебаний (3.2) в итоге заменяется приближенной формулой

$$T \approx 2\pi\sqrt{l/g} [(\pi/2) + (7/6) - (4\delta/3)]$$

или

$$T \approx 2 \varphi \sqrt{l/g}, \quad (3.3)$$

где $\pi/2 < \varphi < \pi$. Таким образом, период колебаний (3.3) оказывается меньше периода T_0 , определяемого по формуле Гюйгенса.

Задача 3.3 ([8], № 1.285). Найти частоту малых колебаний часового маятника, а именно однородного диска массы m и радиуса R , насаженного на невесомый стержень. Расстояние от центра диска до оси вращения маятника равно l (рисунок 13).

Ответ:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l} \left(1 + \frac{R^2}{2l^2}\right)}. \quad (3.4)$$

При условии $R^2/(2l^2) \ll 1$ выражение (3.4) приобретает вид $\omega_0 \approx \sqrt{g/l}$, т. е. собственная циклическая частота колебаний системы (рисунок 13) приближенно равна собственной частоте колебаний математического маятника. Данное условие реализуется при $R \ll l$, а роль длинной невесомой нити выполняет невесомый стержень. Отметим, что в этом случае важно знать только расстояние от точки подвеса до центра массы диска (см. рисунок 13), а не длину всего стержня. Важно подчеркнуть, что формула (3.4) даже в общем случае не зависит от массы диска m (данная величина в условии задачи является лишней!). Это обстоятельство связано с введенным в условии задачи приближением невесомого стержня (т. е. аналога нити математического маятника), когда любая масса диска m будет значительно превосходить массу стержня.

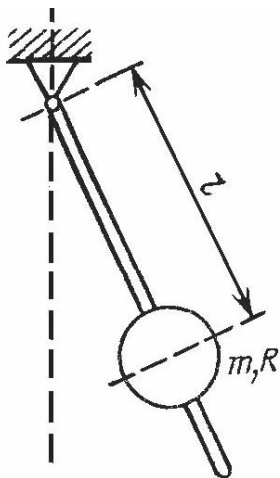


Рисунок 13 – К задаче 3.3

Задача 3.4 (на основе [8], № 1.310). Известно, что в вязкой среде на шарик массы m и радиуса R действует сила $F_v = -6 \pi \eta R v$, где v —

скорость шарика, η — вязкость среды. Определить собственную частоту ω_0 , коэффициент затухания β и частоту затухающих колебаний ω' данного шарика, прикрепленного к пружине с жесткостью k . При какой вязкости среды движение шарика станет аperiодическим?

Ответ:

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}; \beta = 3 \pi \eta R / m; \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2};$$

при

$$\eta \gg \sqrt{m/k} / (3 \pi R). \quad (3.5)$$

При анализе полученных выражений следует помнить о пределах применимости, которые обусловлены прежде всего действием силы трения F_v в среде (в соответствии с формулой Стокса) и выполнением закона Гука для пружины.

Из формулы (3.5) видно, что возникновение аperiодического движения связано с нарушением определенной пропорции между коэффициентом вязкости среды η , параметрами шарика m , R и пружины k . Факторами, препятствующими аperiодическому движению, являются увеличение массы шарика m и жесткости пружины k , а также уменьшение радиуса шарика R . Заметим, что масса m и жесткость k выступают как две равноправные величины в выражении (3.5): с ними связаны кинетическая энергия шарика $W_k = m(dx/dt)^2 / 2$ и потенциальная энергия пружины $W_n = kx^2 / 2$, где $x = x(t)$ — координата шарика при его одномерном движении, t — время. Очевидно, суммарная величина «полезной» энергии системы не должна очень быстро рассеяться вследствие действия силы трения. Для этого коэффициент вязкости среды η должен быть сравнительно небольшим.

Задача 3.5 (на основе [2], № 3.45). Тело массы m упало с высоты h на чашку пружинных весов (рисунок 14). Масса чашки M , масса пружины пренебрежимо мала, жесткость пружины k . Прилипнув к чашке, тело начинает совершать гармонические колебания в вертикальном направлении. Найти амплитуду колебаний A данной системы.

Ответ:

$$A = \frac{mg}{k} \cdot \sqrt{1 + \frac{2hk}{(M+m)g}}. \quad (3.6)$$

Рассмотрим, как изменяется выражение (3.6) при изменении одного из параметров системы (остальные параметры предполагаются постоянными):

а) при $m \rightarrow 0$ амплитуда колебаний системы $A \rightarrow 0$, т. е. практически отсутствует причина возникновения колебаний в системе;

б) при $k \rightarrow 0$ амплитуда колебаний $A \rightarrow 0$, и в этом случае нельзя говорить о гармонических колебаниях и действии в системе квазиупругой силы;

в) увеличение g (например, при ускоренном подъеме системы вверх в кабине лифта с момента падения тела на чашку весов) приведет к возрастанию амплитуды A ;

г) даже при $h \rightarrow 0$ в системе возможны гармонические колебания (см. формулу (3.6), случай $A \neq 0$): в этом случае существует вращающая сила, однако амплитуда A уменьшается вследствие уменьшения потенциальной энергии системы $W_{\text{п}} \sim A^2$.

Задача 3.6 ([2], № 3.67). Однородный цилиндрический блок массы M и радиуса R может свободно поворачиваться вокруг горизонтальной оси O (рисунок 15). На блок плотно намотана нить, к свешивающемуся концу которой прикреплен груз A . Этот груз уравнивает точечное тело массы m , укрепленное на ободе блока, при определенном значении угла α . Найти частоту малых колебаний системы.

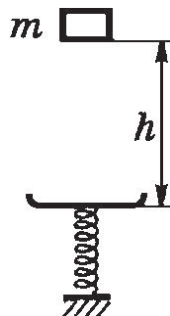


Рисунок 14 – К задаче 3.5

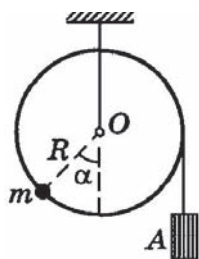


Рисунок 15 – К задаче 3.6

Ответ:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2mg \cos \alpha}{MR + 2mR(1 + \sin \alpha)}}. \quad (3.7)$$

Чтобы охарактеризовать влияние массы тела m на малые колебания системы, перепишем соотношение (3.7) в виде

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2mg \cos \alpha}{R \left[\frac{M}{m} + 2(1 + \sin \alpha) \right]}}. \text{ Очевидно, с увеличением отношения масс}$$

M/m собственная частота колебаний ω_0 уменьшается: более массивный блок оказывается и более инертным, менее «отзывчивым» на действие момента сил, возбуждающих колебания. Однако, как показывает анализ, более существенное влияние на ω_0 может оказывать угол α (рисунок 15): при $\alpha \rightarrow 0$ собственная частота $\omega_0 \rightarrow \omega_{0,\max} =$

$$= \sqrt{\frac{2g}{R \left(\frac{M}{m} + 2 \right)}}, \text{ а при } \alpha \rightarrow \pi/2 \text{ собственная частота } \omega_0 \rightarrow 0 \text{ (гармони-}$$

ческие колебания в системе не возникают). Такое поведение системы тесно связано с ролью момента силы тяжести, зависящего от угла α . Наконец, как следует из формулы (3.7), $\omega_0 \sim R^{-1/2}$: в зависимости от радиуса диска R (а следовательно, и его момента инерции, — см. рисунок 15) собственная частота колебаний ω_0 может изменяться в достаточно широком интервале.

3.1.2. Колебания систем со многими степенями свободы

Задача 3.7 (на основе [9], № 3.28). Рассмотрите систему, показанную на рисунке 16. Она состоит из двух связанных маятников и возбуждается с одного из концов периодической внешней силой $F(t) = F_0 \cos \omega t$. Смещения маятников отсчитываются от положения равновесия (рисунок 16, а) и являются функциями $\psi_a(t)$ и $\psi_b(t)$. Пренебрегая затуханием, покажите, что смещения маятников

$$\psi_a(t) \approx [F_0 / (2M)] \cdot [(\omega_1^2 - \omega^2)^{-1} + (\omega_2^2 - \omega^2)^{-1}] \cos \omega t; \quad (3.8)$$

$$\psi_b(t) \approx [F_0 / (2M)] \cdot [(\omega_1^2 - \omega^2)^{-1} - (\omega_2^2 - \omega^2)^{-1}] \cos \omega t, \quad (3.9)$$

а отношение этих смещений —

$$\psi_b / \psi_a \approx (\omega_2^2 - \omega_1^2) / (\omega_2^2 + \omega_1^2 - 2\omega^2). \quad (3.10)$$

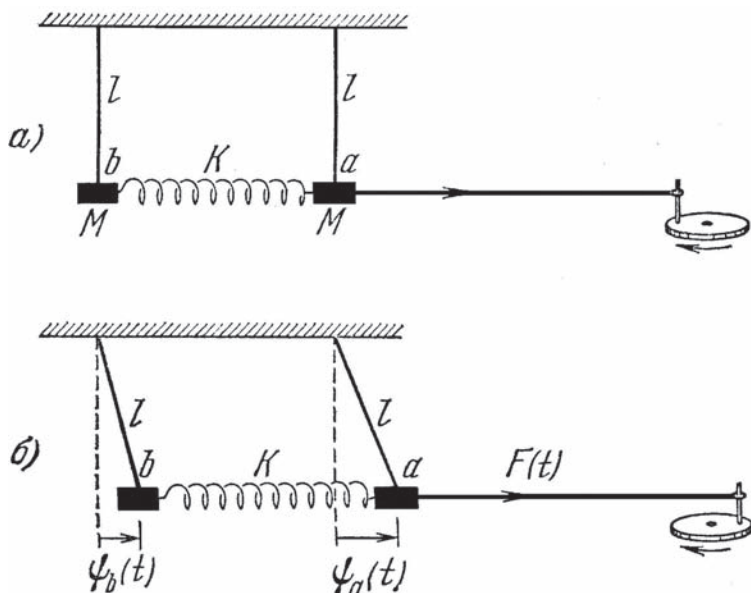


Рисунок 16. К задаче 3.7

В выражениях (3.8) и (3.9) M — каждого тела (a и b), ω_1 и ω_2 — соответственно меньшая и большая частоты колебаний.

В ходе решения задачи определяются частоты мод колебаний $\omega_1 = \sqrt{g/l}$ и $\omega_2 = \sqrt{(g/l) + (2K/M)}$, где K — жесткость пружины, l — длина подвеса (рисунок 16), g — ускорение свободного падения. Из анализа колебательного движения и соотношений (3.8)–(3.10) следует, что рассматриваемая колебательная система представляет собой механический *полосовой фильтр*.

В частности, при частоте $\omega = \omega_1$ или $\omega = \omega_2$ амплитуды колебаний $[F_0 / (2M)] \cdot [(\omega_1^2 - \omega^2)^{-1} \pm (\omega_2^2 - \omega^2)^{-1}]$ из (3.8), (3.9) неограниченно возрастают (если пренебречь трением), а отношение ψ_b / ψ_a в соот-

ветствии с формулой (3.10) такое же, каким оно было бы для соответствующей моды колебаний. При $\omega \leq \omega_1$ отношение ψ_b / ψ_a положительно и уменьшается от 1 до $(\omega_2^2 - \omega_1^2) / (\omega_2^2 + \omega_1^2)$, если ω убывает от ω_1 до 0. Колебания с частотой $\omega \ll \omega_1$ достаточно сильно ослабляются, т. е. наблюдается эффект прохождения через полосовой фильтр. При $\omega \geq \omega_2$ отношение ψ_b / ψ_a отрицательно и уменьшается от -1 (случай $\omega = \omega_2$) до $-(\omega_2^2 - \omega_1^2) / (2\omega^2)$ (случай $\omega \gg \omega_2$). Как следует из (3.10), в области частот $\omega < \omega_1 < \omega_2$ (резонанс не наступил) отношение ψ_b / ψ_a положительно независимо от времени t . При $\omega_1 < \omega_2 < \omega$ (область резонанса пройдена) $\psi_b / \psi_a < 0$ и не зависит от t .

3.2. Электромагнитные колебания

Задача 3.8 ([2], № 3.131). Колебательный контур имеет емкость $C = 10$ мкФ, индуктивность $L = 25$ мГн и активное сопротивление $R = 1,0$ Ом. Через сколько колебаний амплитуда тока в этом контуре уменьшится в e раз?

Ответ:

$$n = \sqrt{\frac{4L}{CR^2}} - 1 / (2\pi) = 16. \quad (3.11)$$

Уменьшение амплитуды тока (т. е. его затухание) в колебательном RLC -контуре обусловлено фактором $L / (CR^2)$. В предельном случае $R \rightarrow 0$ достигается согласно (3.11) $n \rightarrow \infty$, что соответствует возникновению незатухающих колебаний в идеальном LC -контуре благодаря отсутствию диссипации энергии. При $L \rightarrow \infty$ и/или $C \rightarrow 0$ (т. е. $L / C \rightarrow \infty$) не имеет смысла говорить о колебаниях в RLC - или LC -контуре: например, возникающая при этом магнитная энергия была бы $W_m = LI^2 / 2 \rightarrow \infty$.

Отметим, что подкоренное выражение в формуле (3.11) предполагает выполнение неравенства $4L / (CR^2) > 1$ — по сути это требование достаточного малого активного сопротивления R . Нарушение данного неравенства означает невозможность возникновения затухающих колебаний в RLC -контуре, при этом наступает аperiодический разряд конденсатора.

Задача 3.9 ([2], № 3.134). В схеме (рисунок 17) ЭДС элемента $\mathcal{E} = 2,0$ В, его внутреннее сопротивление $r = 9,0$ Ом, емкость конденсатора $C = 10$ мкФ, индуктивность катушки $L = 100$ мГн и сопротивление $R = 1,0$ Ом. В некоторый момент ключ К разомкнули. Найти энергию колебаний в контуре:

а) непосредственно после размыкания ключа;

б) через $t = 0,30$ с после размыкания ключа.

Ответ:

а) $W_0 = \mathcal{E}^2(L + CR^2) / [2(r + R)^2] = 2,0$ мДж; (3.12)

б) $W = W_0 \exp(-tR / L) = 0,10$ мДж. (3.13)

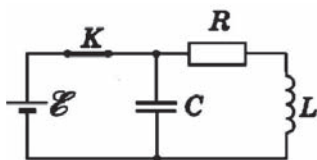


Рисунок 17 – К задаче 3.9

Из выражения (3.12) следует, что после размыкания ключа (см. рисунок 17) энергия колебаний $W_0 \rightarrow 0$ при $\mathcal{E} \rightarrow 0$ (отсутствие ЭДС для исходной зарядки конденсатора) или $R + r \rightarrow \infty$ (значительные активные сопротивления элементов схемы). Запасаемая в колебательном контуре энергия представляется в виде следующих двух вкладов: $W_0 = W_{01} + W_{02}$, где $W_{01} = \mathcal{E}^2 L / [2(r + R)^2]$ и $W_{02} = \mathcal{E}^2 C R^2 / [2(r + R)^2]$ — соответственно магнитная энергия, сосредоточенная в катушке индуктивности, и электрическая энергия заряженного конденсатора (на схеме он соединен параллельно с источником ЭДС, см. рисунок 17).

Формула (3.13) описывает экспоненциальное убывание энергии $W(t)$ колебательной системы после размыкания ключа К. Характерное время релаксации колебательной системы $\tau = L / R$ при этом не зависит от емкости конденсатора C вследствие его параллельного соединения с источником ЭДС (рисунок 17).

Задача 3.10 ([2], № 3.143). Катушку с активным сопротивлением R и индуктивностью L подключили в момент $t = 0$ к источнику напряжения $U = U_m \cos \omega t$. Найти ток в катушке как функцию времени t .

Ответ:

$$I = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} [\cos(\omega t - \varphi) - \cos \varphi \exp(-tR / L)]; \quad (3.14)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \omega L / R. \quad (3.15)$$

Как следует из формулы (3.14), амплитуда силы тока $I_m = U_m / \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ определяется в соответствии с законом Ома для цепи переменного тока. Функция $I(t)$ из (3.14) описывает наложение гармонических колебаний и затухания в данной системе вследствие конечного значения активного сопротивления R . Как и в задаче 3.9, величина $\tau = L / R$ характеризует время релаксации при установлении колебательного процесса в данной системе.

Предельный переход $R \rightarrow 0$ позволяет значительно упростить выражение (3.14) и получить из (3.15) условие $\operatorname{tg} \varphi \rightarrow \infty$ (т. е. $\varphi \rightarrow \pi / 2$). В этом случае сила тока $I \rightarrow [U_m / (\omega L)] \sin \omega t$. Отсюда становится очевидной разность фаз между напряжением $U(t)$ и силой тока $I(t)$ при включении идеальной катушки индуктивности (без активного сопротивления) в данную цепь. Для этого достаточно сравнить $\cos \omega t$ из $U(t)$ и $\sin \omega t = \cos(\omega t - \pi / 2)$ из $I(t)$.

Задача 3.11 ([3], № 4.149). Цепь, содержащая последовательно соединенные конденсатор и катушку с активным сопротивлением, подключена к источнику гармонического напряжения, частоту которого можно менять, не изменяя его амплитуды. При частотах ω_1 и ω_2 амплитуды тока оказались в n раз меньше резонансной амплитуды. Найти:

а) резонансную частоту;

б) добротность.

Ответ:

а) $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$;

б) $Q = \sqrt{\frac{\omega_1 \omega_2 (n^2 - 1)}{(\omega_2 - \omega_1)^2} - \frac{1}{4}}$. (3.16)

Анализ выражения (3.16) позволяет рассмотреть факторы, влияющие на добротность Q данного контура. По смыслу подкоренное выражение в формуле (3.16) должно быть положительным, т. е. $\omega_1 \omega_2 (n^2 - 1) (\omega_2 - \omega_1)^{-2} > 1/4$, что равносильно условию $n^2 > [(\omega_2 - \omega_1)^2 / (4\omega_0^2)] + 1$. Отсюда следует, что амплитудное значение тока I_m уменьшается по сравнению с амплитудой тока при резонансе $I_{\text{рез}}$: $I_{\text{рез}} / I_m = n > 1$. В пределе $I_{\text{рез}} / I_m \rightarrow 1$ соответствует условиям $\omega_1 \rightarrow \omega_2$ и $n = 1$.

Задача 3.12 ([2], № 3.173). Участок цепи состоит из параллельно включенных конденсатора емкости C и катушки с активным сопротивлением R и индуктивностью L . Найти полное сопротивление этого участка для переменного напряжения с частотой ω .

Ответ:

$$Z = \sqrt{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{(\omega CR)^2 + (1 - \omega^2 CL)^2}}. \quad (3.17)$$

Выражение (3.17) может быть упрощено, если пренебречь активным сопротивлением катушки: в случае $R \rightarrow 0$ полное сопротивление (т. е. модуль импеданса) данного участка цепи $Z \rightarrow |\omega L / (1 - \omega^2 CL)|$. Резонансная частота LC -контура при $R = 0$ определяется по формуле Томсона $\omega_0 = 1 / \sqrt{LC}$. При подстановке частоты $\omega = \omega_0$ в (3.17) получаем $Z \rightarrow \infty$. Здесь уместно напомнить, что по отношению к источнику внешнего переменного напряжения индуктивность и емкость соединяются параллельно. Это, в свою очередь, означает, что сила тока $I = U / Z \rightarrow 0$ соответствует полной компенсации токов, протекающих через индуктивность L и емкость C по параллельным ветвям данной цепи.

Задача 3.13 ([2], № 3.172). К источнику синусоидального напряжения с частотой ω подключили параллельно конденсатор емкости C и катушку с активным сопротивлением R и индуктивностью L . Найти разность фаз между подводимым к контуру током и напряжением на источнике.

Ответ:

$$\operatorname{tg} \varphi = [\omega C (R^2 + \omega^2 L^2) - \omega L] / R. \quad (3.18)$$

Особый интерес представляет ситуация, которую принято называть резонансом в параллельном колебательном контуре или резонансом токов. По определению такой резонанс наступает в цепи в том случае, когда ток источника изменяется синфазно с напряжением источника (т. е. сдвиг фаз $\varphi = 0$). Из выражения (3.18) нетрудно получить условие наступления резонанса токов в данной цепи:

$\omega C(R^2 + \omega^2 L^2) - \omega L = 0$. Отсюда $C(R^2 + \omega^2 L^2) - L = 0$, и частота, на которой наступает резонанс токов, определяется по формуле

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}. \quad (3.19)$$

Как видно из выражения (3.19), резонансная частота в этом случае меньше резонансной частоты ω_0 идеального LC -контура ($\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ в соответствии с формулой Томсона) и зависит от активного сопротивления R .

Из выражения (3.18) следует, что знак угла сдвига фаз φ определяет характер нагрузки в колебательном контуре. При $\tan \varphi > 0$ имеет место емкостная нагрузка (когда ток опережает напряжение), а при $\tan \varphi < 0$ — индуктивная нагрузка (когда ток отстает от напряжения).

Задача 3.14 ([2], № 3.151). Цепь из последовательно соединенных конденсатора емкости C , катушки индуктивности L (без активного сопротивления) и резистора с сопротивлением R подключили к источнику гармонического напряжения, частоту ω которого можно менять при постоянной амплитуде. Найти частоту ω , при которой становится максимальным напряжение:

- а) на конденсаторе;
- б) на катушке.

Убедиться, что эти частоты связаны соотношениями $\omega_{C\text{рез}} < \omega_{L\text{рез}}$ и $\omega_{C\text{рез}}\omega_{L\text{рез}} = \omega_0^2$.

Ответ:

$$\text{а) } \omega_{C\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}; \quad (3.20)$$

$$\text{б) } \omega_{L\text{рез}} = \omega_0^2 / \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \quad (3.21)$$

где $\omega_0^2 = 1/(LC)$; $\beta = R/(2L)$.

Частоты, определяемые выражениями (3.20) и (3.21), равны между собой и совпадают с частотой последовательного резонанса при $R = 0$. Однако такая ситуация является сильно идеализированной, поскольку при $R = 0$ в данной цепи протекал бы ток бесконечно боль-

шой амплитуды. При $R \neq 0$ частоты максимумов напряжений на индуктивности и емкости не совпадают. Частота максимума амплитуды напряжения на емкости меньше резонансной частоты ω_0 , а на индуктивности — наоборот, больше ω_0 . С увеличением активного сопротивления R это различие между частотами $\omega_{\text{Срез}}$ и $\omega_{\text{Лрез}}$ увеличивается. При этом следует обратить внимание на роль коэффициента затухания β , присутствующего в формулах (3.20) и (3.21).

Нетрудно убедиться, что в общем случае частоты из (3.20) и (3.21) удовлетворяют неравенству $\omega_{\text{Срез}} < \omega_{\text{Лрез}}$. Разность выражений (3.20) и (3.21) представляется в виде $\omega_{\text{Срез}} - \omega_{\text{Лрез}} = -2\beta^2 / \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} < 0$ при любых значениях $\beta > 0$.

3.3. Волновые процессы

Задача 3.15 ([2], № 3.195). Точечный изотропный источник звука находится на перпендикуляре к плоскости кольца, проходящем через его центр O . Расстояние между точкой O и источником $l = 1,00$ м, радиус кольца $R = 0,50$ м. Найти средний поток энергии через площадь, ограниченную кольцом, если в точке O интенсивность звука $I_0 = 30$ мкВт / м². Затухание волн пренебрежимо мало.

Ответ:

$$\langle \Phi \rangle = 2 \pi l^2 I_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (R/l)^2}} \right) = 20 \text{ мкВт}. \quad (3.22)$$

В выражении (3.22) целесообразно выделить зависимости среднего потока энергии $\langle \Phi \rangle$ от расстояния l , а также от радиуса кольца R . Представим сначала формулу (3.22) в виде $\langle \Phi(l) \rangle = 2 \pi l^2 I_0 \left(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + R^2}} \right)$ и предположим, что $R = \text{const}$. В этом случае средний поток энергии $\langle \Phi(l) \rangle \rightarrow 0$ при $l \rightarrow 0$ и монотонно возрастает при $l \gg R$. Выражение (3.22) может рассматриваться и как функция $\langle \Phi(R) \rangle$ при $l = \text{const}$, причем $\langle \Phi(R) \rangle \rightarrow 0$ в случае $R \rightarrow 0$, тогда как $\langle \Phi(R) \rangle \rightarrow 2 \pi l^2 I_0$ в случае $R \rightarrow \infty$. Такое поведение среднего потока $\langle \Phi \rangle$ из формулы (3.22) связано с используемым в задаче приближением малого затухания акустических волн.

Задача 3.16 (на основе [3], № 4.190). В однородной среде с плотностью ρ установилась продольная стоячая волна $\xi = a \cos kx \cos \omega t$. Найти выражения для объемной плотности:

а) потенциальной энергии;

б) кинетической энергии.

Ответ:

$$\text{а) } w_p = (\rho a^2 \omega^2 / 2) \sin^2 kx \cos^2 \omega t; \quad (3.23)$$

$$\text{б) } w_k = (\rho a^2 \omega^2 / 2) \cos^2 kx \sin^2 \omega t. \quad (3.24)$$

Из выражений (3.23) и (3.24) видно, что объемные плотности энергии являются квадратичными функциями смещения ξ и скорости ξ_t' точек среды соответственно. Эти выражения целесообразно сравнить с формулами потенциальной энергии упругой деформации $W_p = \kappa y^2 / 2$ и кинетической энергии материальной точки $W_k = m(y_t')^2 / 2$, где κ — коэффициент жесткости, m — масса, y — координата. Для проверки корректности выражений (3.23) и (3.24) определим суммарную объемную плотность энергии данной волны:

$$w = w_p + w_k = (\rho a^2 \omega^2 / 2)[(1 - 2 \cos^2 kx) \cos^2 \omega t + \cos^2 kx]. \quad (3.25)$$

Выражение (3.25) может быть также представлено в виде

$$w = (\rho a^2 \omega^2 / 2)[\cos^2 \omega t + \cos^2 kx (1 - 2 \cos^2 \omega t)]. \quad (3.26)$$

Обратим внимание на то, что в выражениях (3.25) и (3.26) величины $\cos^2 \omega t$ и $\cos^2 kx$ обладают свойством коммутативности. Подобная замена $\cos^2 \omega t$ на $\cos^2 kx$ и $\sin^2 \omega t$ на $\sin^2 kx$ в формулах (3.23) и (3.24) позволяет переходить от плотности потенциальной энергии волны к плотности ее кинетической энергии или наоборот.

4. Оптика

Решение задач по оптике является важной составляющей курса физики. Задачи, решаемые на аудиторных практических занятиях и самостоятельно, способствуют развитию у студентов физического мышления, целостному восприятию оптических явлений, рассматриваемых в рамках геометрической оптики, волновой оптики или квантовой оптики. При этом важную роль играют оценки, сравнения и приближения в ходе решения задач, а также взаимосвязи между различными подходами при интерпретации оптических явлений. Это в конечном итоге благоприятствует изучению физики в целом и формированию у студентов целостной физической картины мира. Ниже рассматриваются конкретные примеры и показываются преимущества анализа ответов при решении задач по оптике.

4.1. Геометрическая оптика и фотометрия

Задача 4.1 ([2], № 4.18). Луч света падает на плоскопараллельную стеклянную пластинку толщины $d = 6,0$ см. Угол падения $\theta = 60^\circ$. Найти величину смещения луча, прошедшего через эту пластинку.

Ответ:

$$x = \left(1 - \frac{\cos \theta}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}\right) d \sin \theta = 3,1 \text{ см.} \quad (4.1)$$

Из соотношения (4.1) видно, что величина смещения луча $x \sim d$. При этом пластинка считается оптически однородной. Угол падения изменяется в интервале $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$, причем $x \rightarrow 0$ в случае $\theta \rightarrow 0$ и $x \rightarrow d$ в случае $\theta \rightarrow 90^\circ$. Значения $x > d$ не достигаются при углах $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ и показателях преломления стекла $n > 1$, как следует из (4.1). При прохождении стеклянной пластины (т. е. оптически более плотной среды по сравнению с воздухом) световой луч отклоняется от направления вектора нормали к пластине на угол, меньший угла падения θ . Как следствие, имеем смещение луча $x < d$.

Задача 4.2 ([2], № 4.19). На краю бассейна стоит человек и наблюдает камень, лежащий на дне. Глубина бассейна h . На каком рас-

стоянии от поверхности воды видно изображение камня, если луч зрения составляет с нормалью к поверхности воды угол θ ?

Ответ:

$$h' = (h n^2 \cos^3 \theta) / (n^2 - \sin^2 \theta)^{3/2}. \quad (4.2)$$

Нетрудно заметить, что при угле $\theta = 0$ (т. е. при падении светового луча нормально к поверхности бассейна) выражение (4.2) приобретает вид $h^* = h / n$. Это означает сокращение расстояния h^* по сравнению с h — истинной глубиной бассейна. На рисунке 18 показан график функции h^* / h в интервале углов $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ при показателе преломления воды $n = 1,33$. Вследствие того что глубина бассейна $h = \text{const}$, график функции $h^*(\theta)$ получается из приведенного на

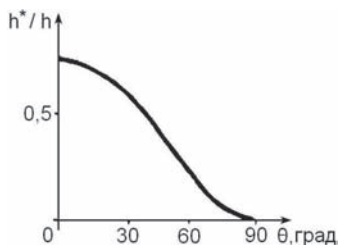


Рисунок 18 – К задаче 4.2

рисунке 18 при изменении масштаба по оси ординат. Анализ функции $h^*(\theta)$ показывает, что производная $dh^* / d\theta = 0$ при $\theta = 0^\circ$ и $\theta = 90^\circ$.

Из графика на рисунке 18 следует, что изображение камня при угле $\theta \rightarrow 90^\circ$ соответствует $h^* \rightarrow 0$, т. е. расстояние от поверхности воды до изображения камня существенно сокращается.

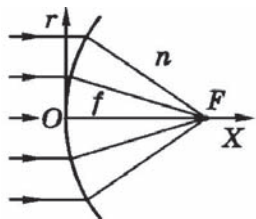


Рисунок 19 – К задаче 4.3

Задача 4.3 ([2], № 4.33). Параллельный пучок света падает из вакуума на поверхность, которая ограничивает область с показателем преломления n (рисунке 19). Найти форму этой поверхности — уравнение $x(r)$, при которой пучок будет сфокусирован в точке F на расстоянии f от вершины O . Пучок какого максимального радиуса сечения может быть сфокусирован?

Ответ:

$$x = \frac{nf}{n+1} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{(n+1)r^2}{(n-1)f^2}} \right); \quad (4.3)$$

$$r_{\text{макс}} = f \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}. \quad (4.4)$$

Форма искомой преломляющей поверхности в значительной мере зависит от отношения r/f и преломляющих свойств среды. В частности, при $n \rightarrow 1$ подкоренное выражение в формуле (4.3) остается неотрицательным, если

$$(r/f)^2 < (n-1)/(n+1). \quad (4.5)$$

Условие (4.5) хорошо согласуется с выражением (4.4), поскольку в предельном случае $n \rightarrow 1$ требуется выполнение неравенства $r_{\text{макс}}/f \ll 1$. Прямопропорциональная зависимость $r_{\text{макс}} \sim f$ в (4.4) указывает на преимущества использования длиннофокусных преломляющих поверхностей для фокусировки оптических пучков больших радиусов (см. рисунок 19).

Задача 4.4 (на основе [10], № 70). Определить световой поток Φ , падающий на круглую площадку радиусом $R = 30$ см, удаленную на расстояние $l_0 = 40$ см от точечного источника, лежащего на нормали, выходящей из центра площадки. Сила света источника $I = 30$ кд.

Ответ:

$$\Phi = 2 \pi I [1 - l_0(R^2 + l_0^2)^{-1/2}] \approx 38 \text{ лм}. \quad (4.6)$$

При приближении к точечному источнику света $l_0 \rightarrow 0$ и $\Phi \rightarrow 2\pi I$, что соответствует световому потоку от изотропного источника в полупространстве (телесный угол $\Omega = 2\pi$ ср). Аналогичный результат следует из выражения (4.6) при $R \gg l_0$, т. е. при падении светового потока на плоскость. Наконец, при радиусе площадки $R \rightarrow 0$ из формулы (4.6) получаем $\Phi \rightarrow 0$, т. е. физически невозможно зафиксировать световой поток из-за бесконечно малых размеров площадки.

Задача 4.5 ([10], № 73). Нить лампы накаливания, расположенная в центре круглой колбы, создает световой поток $\Phi_0 = 238$ лм. Определить световой поток, испускаемый лампой, принимая, что стекло поглощает 1 % светового потока, показатель преломления стекла $n = 1,5$; ρ — коэффициент отражения, причем ρ вычисляется по формуле $\rho = (n - 1)^2 / (n + 1)^2$; α — коэффициент поглощения.

Ответ:

$$\Phi = \Phi_0(1 - \rho)^2(1 - \alpha) = 217 \text{ лм.} \quad (4.7)$$

Величина светового потока Φ из выражения (4.7) зависит от величины исходного потока Φ_0 , а также коэффициентов ρ и α . Коэффициент отражения ρ зависит от показателя преломления стекла n так, что множитель $(1 - \rho)^2$ из (4.7) представляется в виде $(1 - \rho)^2 = 16n^2 / (n + 1)^4$.

В предельном случае $n \rightarrow 1$ справедливы условия $(1 - \rho)^2 \rightarrow 1$ и $\Phi \rightarrow \Phi_0(1 - \alpha)$. При слабом поглощении ($\alpha \rightarrow 0$) имеем выражение $\Phi \rightarrow \Phi_0(1 - \rho)^2$, а при одновременном стремлении $\alpha \rightarrow 0$ и $n \rightarrow 1$ имеем $\Phi \rightarrow \Phi_0$. Последнее условие соответствует сохранению светового потока за пределами лампы в оптически менее плотной (по сравнению со стеклом) прозрачной среде. Добавим, что световой поток $\Phi \rightarrow 0$ в соответствии с формулой (4.7) достигается либо за счет $\rho \rightarrow 1$, либо за счет $\alpha \rightarrow 1$. Случай $\rho \rightarrow 1$ соответствует среде, отражающей практически все оптическое излучение, а случай $\alpha \rightarrow 1$ соответствует среде, практически непроницаемой для оптического излучения.

4.2. Интерференция света

Задача 4.6 ([2], № 4.94). Плоская монохроматическая световая волна длины λ падает на поверхность стеклянного клина, угол между гранями которого $\alpha \ll 1$. Плоскость падения перпендикулярна к ребру клина, угол падения θ_1 . Найти расстояние между соседними максимумами интерференционных полос на экране, расположенном перпендикулярно к отраженному свету.

Ответ:

$$\Delta x = \lambda \cos \theta_1 / (2\alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}) \quad (4.8)$$

Согласно выражению (4.8) расстояние $\Delta x \sim \lambda$, что непосредственно связано с условием максимумов интерференции света. Увеличение Δx может происходить как за счет угла между гранями $\alpha \rightarrow 0$, так и за счет угла падения света $\theta_1 \rightarrow 0$. В частности, $\Delta x \rightarrow \lambda / (2 \alpha n)$ при $\theta_1 \rightarrow 0$. Эти факторы показывают, насколько оптическая длина пути в среде чувствительна к изменению ориентации клина или светового луча в данном опыте. Кроме того, оптическая длина пути и расстояние Δx зависят от показателя преломления n стекла, и это также находит свое отражение в формуле (4.8). Например, при уменьшении n величина Δx возрастает. В предельном случае $n \rightarrow 1$ и $\theta_1 \rightarrow 0$ имеем $\Delta x \rightarrow \lambda / (2\alpha)$, т. е. при малых углах α справедливо неравенство $\Delta x \gg \lambda$. В этом случае условия наблюдения интерференционных полос существенно усложняются.

Задача 4.7 ([11], № 215). Найти число полос интерференции N , получающихся с помощью бипризмы, если показатель преломления ее n , преломляющий угол α , длина волны источника λ . Расстояние от источника света до бипризмы равно a , а расстояние от бипризмы до экрана равно b .

Ответ:

$$N = \frac{4ab}{a+b} \cdot \frac{(n-1)^2 \alpha^2}{\lambda}. \quad (4.9)$$

В формуле (4.9) можно выделить два фактора, влияющие на число полос интерференции N . Это геометрический фактор, связанный с расстояниями a и b и малым преломляющим углом $\alpha \ll 1$, и оптический фактор, связанный с показателем преломления бипризмы n и длиной волны λ . Величина N в значительной мере определяется конкуренцией линейных величин a , b и угла α . При расстоянии $a \ll b$ число полос $N \rightarrow 4 a (n-1)^2 \alpha^2 / \lambda$, а при $b \ll a$ число полос $N \rightarrow 4 b \times (n-1)^2 \alpha^2 / \lambda$, т. е. в обоих случаях N оказывается меньше числа полос при соизмеримых расстояниях a и b .

Согласно формуле (4.9) число полос N квадратично зависит от показателя преломления n . Нетрудно проверить, что при $n \rightarrow 1$ преломляющие свойства бипризмы заметно ослабевают, а возможность наблюдения интерференции вследствие $N \rightarrow 0$ утрачивается.

4.3. Дифракция света

Задача 4.8 ([10], № 301). Найти угловое распределение интенсивности света при фраунгоферовой дифракции на решетке из N щелей и с периодом d при условии, что световые лучи падают на решетку нормально, а ширина щели равна b .

Ответ:

$$I = C \left[\frac{\sin(N\pi d \sin \theta / \lambda)}{\sin(\pi d \sin \theta / \lambda)} \right]^2 \left[\frac{\sin(\pi b \sin \theta / \lambda)}{\pi b \sin \theta / \lambda} \right]^2, \quad (4.10)$$

где C — постоянная, а θ — угол между нормалью к решетке и заданным направлением, к которому относится интенсивность I .

Выражение (4.10) существенно упрощается при использовании соотношений $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = x$ (первый замечательный предел) и $\lim_{x \rightarrow 0} |\sin(Nx) / \sin x| = N$. В частности, при малых углах θ из формулы (4.10) следует, что интенсивность света

$$I \rightarrow C [\sin(N\pi d \theta / \lambda) / \sin(\pi d \theta / \lambda)]^2 [\sin(\pi b \theta / \lambda) / (\pi b \theta / \lambda)]^2.$$

При условии

$$\pi d \theta / \lambda \ll N, \quad (4.11)$$

где N — натуральное число (для современных дифракционных решеток $N \gg 10^3$), $[\sin(N\pi d \theta / \lambda) / \sin(\pi d \theta / \lambda)]^2 \sim N^2$. При условии

$$\pi b \theta / \lambda \ll 1 \quad (4.12)$$

справедливо соотношение $[\sin(\pi b \theta / \lambda) / (\pi b \theta / \lambda)]^2 \sim 1$, вследствие чего интенсивность света из (4.10)

$$I \rightarrow CN^2. \quad (4.13)$$

При углах $\theta \rightarrow \pi / 2$ из выражения (4.10) следует условие $I \rightarrow C [\sin(N\pi d / \lambda) / \sin(\pi d / \lambda)]^2 [\sin(\pi b / \lambda) / (\pi b / \lambda)]^2$, а при дополнительных условиях $\pi d / \lambda \ll N$ и $\pi b / \lambda \ll 1$, родственных соотноше-

ниям (4.11) и (4.12) соответственно, снова выполняется условие (4.13).

Соотношение (4.13), справедливое при определенных углах θ , характеризует распределение интенсивности света и роль числа N щелей дифракционной решетки. Как известно, колебания от всех N щелей можно считать когерентными друг относительно друга, а при условии максимумов интерференции $d \sin \theta = \pm m \lambda$ ($m = 0; 1; 2; \dots$) интенсивность главного максимума равна $I_{\max} = N^2 I(\theta)$, где $I(\theta)$ — интенсивность, создаваемая одной щелью в направлении θ .

Сравнение условий (4.11) и (4.12) для малых углов θ показывает, что более строгим неравенством является условие (4.12). Поскольку период дифракционной решетки нередко выбирается как $d \sim 2b$, из неравенства (4.12) следует условие $\pi d \theta / \lambda \ll 2$, которое в конечном итоге обеспечивает выполнение условия (4.13).

Задача 4.9 ([12], № 5.72). Предположив, что колебание, создаваемое в центре дифракционной картины от круглого отверстия m -й зоной Френеля можно представить в виде $E_m = A_1 \rho^{m-1} \times \exp\{i[\omega t (m-1)\pi]\}$, где A_1 — амплитуда колебания, создаваемого первой зоной, ρ — число, чуть меньшее единицы (имеется в виду, что надо взять вещественную часть этого выражения), определить результирующую амплитуду колебания, создаваемого N зонами Френеля.

Ответ:

$$A = [A_1 - (-1)^N \rho A_N] / (1 + \rho) \approx [A_1 - (-1)^N A_N] / 2 \quad (4.14)$$

(ρ очень мало отличается от единицы).

Укажем, что ρ в выражении (4.14) играет роль переменного радиуса, задаваемого при построении спирали в полярных координатах (ρ, φ). Следует учесть также, что используемое в данной задаче обозначение ρ не имеет ничего общего с коэффициентом отражения (см., например, задачу 4.5).

Пределы применимости формулы (4.14) связаны с натуральными числами N , не превосходящими, как правило, 10. Большие значения N предполагают дополнительную корректировку формулы (4.14) вследствие зависимости $\rho(N)$, при малых N функция $\rho(N) \approx \text{const.}$

Нечетные значения N обуславливают максимумы интенсивности света, т. е. выполнение равенства $A \approx (A_1 + A_N) / 2$. Открытие всех N зон Френеля приводит к результирующей амплитуде $A \approx A_1 / 2$, независимо от четности N : в этом случае амплитуда колебания от N -й зоны Френеля

$$A_N \ll A_1, \quad (4.15)$$

и результирующая амплитуда A из (4.14) определяется практически половиной амплитуды колебания, создаваемого первой зоной Френеля. Однако выражение (4.15) не следует непосредственно из формулы (4.14), что указывает на ограниченность применения последней при решении задач по дифракции Френеля от круглого отверстия.

4.4. Формулы Френеля. Поляризация света

Задача 4.10 (на основе [2], № 4.190). Естественный свет падает под углом Брюстера на поверхность стекла. Найти с помощью формул Френеля:

- а) коэффициент отражения;
- б) степень поляризации преломленного света.

Ответ:

$$\text{а) } \rho = (n^2 - 1)^2 / [2(n^2 + 1)^2]; \quad (4.16)$$

$$\text{б) } P = \rho / (1 - \rho) = [(1 + n^2)^2 - 4n^2] / [(1 + n^2)^2 + 4n^2], \quad (4.17)$$

где n — показатель преломления стекла.

Обратим внимание на значения ρ и P , которые могут достигаться при варьировании показателя преломления n в выражениях (4.16) и (4.17). При стремлении $n \rightarrow 1$, согласно формуле (4.16), $\rho \rightarrow 0$, т. е. отражение света практически отсутствует. В этом случае нет физической причины возникновения отражения световой волны при переходе через границу двух сред с практически одинаковыми показателями преломления. Действительно, в соответствии с формулами Френеля [13] отражение световой волны на границе раздела двух сред тем больше, чем больше по модулю разность показателей преломления этих сред. При $n \rightarrow 1$, согласно формуле (4.17), $P \rightarrow 0$, и поляризация

света не наблюдается. Последний результат также хорошо согласуется с физическими представлениями [13] о поляризации света.

Выражение (4.17) дополнительно показывает, что падающий под углом Брюстера естественный свет вызывает появление в среде с показателем преломления n частично поляризованного света. Степень поляризации преломленного света (4.17) будет тем больше, чем больше коэффициент отражения ρ из (4.16), а следовательно, чем больше по модулю разность показателей преломления двух сред.

Задача 4.11 ([11], № 445). Имеются две параллельные полупрозрачные плоскости. Коэффициенты отражения и пропускания первой из них равны ρ_1 и σ_1 , а второй ρ_2 и σ_2 соответственно. Степень монохроматичности падающего света невелика, так что правильной интерференции не происходит, а имеет место сложение интенсивности света. Найти коэффициенты отражения ρ и пропускания σ для совокупности обеих плоскостей.

Ответ:

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 \sigma_1^2 + \rho_2 \sigma_1^2 \rho_1 \rho_2 + \dots = \rho_1 + [\rho_2 \sigma_1^2 / (1 - \rho_1 \rho_2)]; \quad (4.18)$$

$$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_2 \rho_1 \rho_2 + \sigma_1 \sigma_2 (\rho_1 \rho_2)^2 + \dots = \sigma_1 \sigma_2 / (1 - \rho_1 \rho_2). \quad (4.19)$$

Выражения (4.18) и (4.19) представляют собой суммы членов бесконечно убывающих геометрических прогрессий (в (4.18) начиная со второго слагаемого). Обратим внимание на то, что в формулах (4.18) и (4.19) знаменатель прогрессии равен $\rho_1 \rho_2$. Это прямо указывает на важную роль коэффициентов отражения плоскостей при множестве актов отражения световой волны. Из физических соображений ясно, что величина $\rho_1 \rho_2 < 1$, так как $\rho_i < 1$ ($i = 1; 2$).

Рассмотрим далее упрощение выражений (4.18) и (4.19) при различных предельных переходах. Например, при $\rho_1 \rightarrow 1$ и $\sigma_1 \rightarrow 0$ из (4.18) и (4.19) получаем $\rho \rightarrow \rho_1 \rightarrow 1$ и $\sigma \rightarrow \sigma_1 \rightarrow 0$ соответственно. При $\rho_2 \rightarrow 1$ и $\sigma_2 \rightarrow 0$ реализуются условия $\rho \rightarrow \rho_1 + [\sigma_1^2 / (1 - \rho_1)]$ и $\sigma \rightarrow 0$ соответственно. Одновременное стремление коэффициентов отражения $\rho_1 \rightarrow 0$ и $\rho_2 \rightarrow 0$ приводит к условиям $\rho \rightarrow 0$ и $\sigma \rightarrow \sigma_1 \sigma_2$, тогда как условия $\sigma_1 \rightarrow 0$ и $\sigma_2 \rightarrow 0$ приводят к соотношениям $\rho \rightarrow \rho_1$ и $\sigma \rightarrow 0$. Полученные условия позволяют лучше воспринять взаимо-

связь между отдельными актами отражения и пропускания световой волны каждой из плоскостей. В частном случае $\rho_1 \rightarrow 0$ и $\sigma_1 \rightarrow 0$ суммарная величина искомых коэффициентов из (4.18), (4.19) $\rho + \sigma \rightarrow 1$, тогда как простое сложение выражений (4.18) и (4.19), вообще говоря, дает $\rho + \sigma \neq 1$. Последнее неравенство тесно связано с преломлением световой волны на границах сред, о чем не упоминалось в условии данной задачи.

4.5. Поглощение света

Задача 4.12 ([3], № 5.228). Плоская монохроматическая световая волна интенсивности I_0 падает нормально на пластинку толщиной d , коэффициент отражения каждой поверхности которой равен ρ . Учтя многократные отражения, найти интенсивность прошедшего света, если:

- а) пластинка идеально прозрачная (поглощение отсутствует);
- б) линейный показатель поглощения равен κ .

Ответ:

$$\text{а) } I = I_0 (1 - \rho)^2 (1 + \rho^2 + \rho^4 + \dots) = I_0 (1 - \rho)^2 / (1 - \rho^2); \quad (4.20)$$

$$\text{б) } I = I_0 (1 - \rho)^2 \sigma (1 + \sigma^2 \rho^2 + \sigma^4 \rho^4 + \dots) = I_0 \sigma (1 - \rho)^2 / (1 - \sigma^2 \rho^2), \quad (4.21)$$

где $\sigma = \exp(-\kappa d)$.

Как в выражениях (4.18) и (4.19), правые части соотношений (4.20) и (4.21) получаются в результате суммирования членов бесконечно убывающих геометрических прогрессий. Теперь знаменатель каждой из прогрессий в формулах (4.20) и (4.21) равен ρ^2 .

Следует обратить внимание на опечатку, допущенную в учебном пособии [3] на с. 385 (в более позднем издании [2] также на с. 385) при записи выражения (4.21): сомножитель $(1 - \rho^2)$ вместо $(1 - \rho)^2$ не позволяет перейти от формулы (4.21) при $\kappa \neq 0$ к формуле (4.20), справедливой при $\kappa = 0$ или $\sigma = 1$.

Дополнительно укажем, что выражение (4.20) существенно упрощается при условиях $\rho \rightarrow 0$ или $\rho \rightarrow 1$: интенсивность прошедшего света в этих случаях $I \rightarrow I_0$ и $I \rightarrow 0$ соответственно. Как следует из

формулы (4.21), $I \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 1$ и в случае $\sigma \neq 1$. При таких условиях знание коэффициента поглощения материала пластинки несущественно, поскольку световая волна практически полностью отражается от поверхности пластинки.

Задача 4.13 ([2], № 4.244). Пучок света интенсивности I_0 падает нормально на прозрачную пластинку толщины l . Пучок содержит все длины волн в диапазоне от λ_1 до λ_2 одинаковой спектральной интенсивности. Найти интенсивность прошедшего через пластинку пучка, если в этом диапазоне длин волн показатель поглощения линейно зависит от λ в пределах от κ_1 до κ_2 и коэффициент отражения каждой поверхности которой равен ρ . Вторичными отражениями пренебречь.

Ответ:

$$I = I_0 (1 - \rho)^2 [\exp(-\kappa_1 l) - \exp(-\kappa_2 l)] / [(\kappa_2 - \kappa_1) l]. \quad (4.22)$$

Как и в выражениях (4.20) и (4.21), интенсивность прошедшего через пластинку света из (4.22) $I \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 1$, что достигается при практически полном отражении света. В этом случае информация о поглощении света в пластинке становится несущественной. Другой важный предельный переход имеет место при $\kappa_2 \rightarrow \kappa_1$: согласно формуле (4.22) $\lim_{\kappa_2 \rightarrow \kappa_1} I = I_0 (1 - \rho)^2 \exp(-\kappa_1 l)$, а при отсутствии отражения света (т. е. при $\rho \rightarrow 0$) имеем $I \rightarrow I_0 \exp(-\kappa_1 l)$, что соответствует зависимости $I(l)$ из закона Бугера–Ламберта–Бера.

4.6. Квантовая природа излучения

Задача 4.14 ([14], № 5.187). Определите силу тока, протекающего по вольфрамовой проволоке диаметром $d = 0,8$ мм, температура которой в вакууме поддерживается постоянной и равной $T = 2800$ °С. Поверхность проволоки считать серой с поглощающей способностью $A_T = 0,343$. Удельное сопротивление проволоки при данной температуре $\rho = 0,92 \cdot 10^{-4}$ Ом · см. Температура окружающей проволоку среды $T_0 = 17$ °С.

Ответ:

$$I = \sqrt{\frac{A_T \sigma (T^4 - T_0^4) \pi^2 d^3}{4\rho}} = 48,8 \text{ А}. \quad (4.23)$$

Отметим прежде всего, что обозначения I и ρ в данной задаче не имеют ничего общего с интенсивностью света и коэффициентом отражения из задач 4.10–4.13. Анализ соотношения (4.23), несомненно, должны предшествовать действия с наименованиями и проверка размерности силы тока $[I] = \text{А}$.

Из выражения (4.23) следует, что при температуре $T \rightarrow T_0$ сила тока $I \rightarrow 0$. Уменьшение поглощающей способности A_T или диаметра d проволоки также приводит к уменьшению силы тока I , протекающей через эту проволоку. Наоборот, уменьшение удельного сопротивления ρ проволоки вызывает согласно (4.23) увеличение силы тока I . Коэффициент A_T , характеризующий поглощающую способность проволоки, является связующим звеном между электрической мощностью источника тока и мощностью теплового излучения раскаленной проволоки.

Задача 4.15 ([14], № 5.224). Давление p монохроматического света с длиной волны $\lambda = 600$ нм на зачерненную поверхность, расположенную перпендикулярно падающему излучению, составляет 0,1 мкПа. Определите: 1) концентрацию n фотонов в световом пучке; 2) число N фотонов, падающих ежесекундно на 1 м^2 поверхности.

Ответ:

$$1) n = \lambda p / [h c (1 + \rho)] = 3,02 \cdot 10^{11} \text{ м}^{-3}; \quad (4.24)$$

$$2) N = n c t S = 9,06 \cdot 10^{19}. \quad (4.25)$$

В выражениях (4.24) и (4.25) c — скорость света в вакууме. При решении данной задачи предполагается, что идеальная зачерненная поверхность характеризуется коэффициентом отражения $\rho = 0$. С увеличением отражающей способности этой поверхности объемная концентрация n согласно формуле (4.24) уменьшается. Кроме того, уменьшение концентрации n может быть связано с уменьшением длины волны λ или светового давления p .

Нетрудно заметить, что число N фотонов, падающих на зачерненную поверхность, определяется в соответствии с формулой (4.25) как произведение объемной концентрации фотонов n из (4.24) и объема параллелепипеда, образуемого потоком фотонов, движущихся прямолинейно в однородной прозрачной среде. Очевидно, этот объем

равен ctS , где ct — высота параллелепипеда (высота определяется по направлению распространяющихся световых лучей), S — площадь основания данного параллелепипеда, т. е. площадь облучаемой поверхности с вектором нормали, параллельным падающим световым лучам.

5. Физика макросистем

В данном разделе курса физики все тела рассматриваются как физические системы (макроскопические тела), состоящие из большого числа микрообъектов — атомов или молекул. Известно, что 1 моль любого вещества, независимо от агрегатного состояния, содержит примерно $6,02 \cdot 10^{23}$ молекул. При решении задач по физике макросистем рассматривают темы, охватывающие основы молекулярной физики, термодинамики, статистической физики, физической кинетики и физики вещества. Важно отметить, что физика макросистем — раздел физики, где рассматриваются тепловые явления и тела в различных агрегатных состояниях и изучаются наиболее общие свойства макроскопических тел. При этом часто применяются статистический и термодинамический методы, и поэтому особый интерес приобретает вопрос о границах их применимости в конкретных задачах. Статистический и термодинамический методы взаимно дополняют друг друга [1], позволяя тем самым избегать одностороннего объяснения сути физических явлений и процессов, а также интерпретации физических свойств, проявляющихся в различных макросистемах. Рассматриваемые задачи весьма разнообразны — от простых оценок числа частиц в заданном объеме вещества до описания явлений переноса и фазовых превращений при различных условиях. Ниже приводятся примеры анализа ответов при решении задач по физике макросистем.

5.1. Газообразное состояние

Задача 5.1 ([6], № 6.6). В баллоне объемом $V = 7,5$ л при $T = 300$ К находится смесь идеальных газов: $\nu_1 = 0,10$ моль кислорода, $\nu_2 = 0,20$ моль азота и $\nu_3 = 0,30$ моль углекислого газа. Считая газы идеальными, найти:

а) давление смеси;

б) среднюю молярную массу M данной смеси, которая входит в уравнение ее состояния $pV = (m / M) R T$, где m — масса смеси.

Ответ:

$$\text{а) } p = (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3) RT / V = 0,20 \text{ МПа;} \quad (5.1)$$

$$\text{б) } M = (\nu_1 M_1 + \nu_2 M_2 + \nu_3 M_3) / (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3) \approx 0,037 \text{ кг/моль.} \quad (5.2)$$

Выражение (5.1) определяет в соответствии с законом Дальтона давление p смеси не вступающих в химическую реакцию идеальных газов: $p = p_1 + p_2 + \dots$. Здесь каждое слагаемое вида $p_i = \nu_i R T / V$ характеризует парциальное давление i -го компонента газовой смеси. При этом используется приближение идеального газа (достаточно вспомнить уравнение Менделеева–Клапейрона).

Рассмотрим далее выражение (5.2) при $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3$: соответствующая средняя молярная масса трехкомпонентной газовой смеси становится равной $M = (M_1 + M_2 + M_3) / 3$. Такое прямое усреднение молярной массы справедливо при условиях

$$V = \text{const}, T = \text{const} \text{ и } \nu_i = \text{const} \ (i = 1; 2; 3). \quad (5.3)$$

Нарушение постоянства хотя бы одного из термодинамических параметров, входящих в условия (5.3), приведет к усложнению выражения (5.2) для средней молярной массы M смеси газов.

Задача 5.2 ([15], № 480). Найти уравнение политропы для газа Ван-дер-Ваальса, считая, что его теплоемкость C не зависит от температуры.

Ответ:

$$T(V - b)^{n-1} = \text{const}, \quad (5.4)$$

где

$$n = 1 + [R / (C_V - C)]. \quad (5.5)$$

При $b = 0$ уравнение (5.4) приобретает вид уравнения политропы идеального газа $TV^{n-1} = \text{const}$ (в более известной форме уравнение политропы записывается как $pV^n = \text{const}$), где T — температура, V — объем, p — давление газа. Формула (5.5), определяющая показатель политропы n , носит более общий характер по сравнению с формулой $n = (C - C_p) / (C - C_V)$, используемой для идеальных газов. Последнее выражение получается из (5.5) в случае, если молярные теплоемкости газа C_p и C_V удовлетворяют уравнению Р. Майера $C_p = C_V + R$.

Рассматривая изопроцессы, нетрудно провести сравнительный анализ соотношений (5.4) и (5.5) для ван-дер-ваальсового и идеального газов.

а) Изохорический процесс: молярная теплоемкость $C = C_V$, показатель политропы $n \rightarrow \infty$, а уравнение (5.4) принимает вид $V - b = \text{const}$ (для идеального газа вследствие $b = 0$ имеем $V = \text{const}$).

б) Изобарический процесс: молярная теплоемкость $C = C_p$, показатель политропы $n = 1 + [R / (C_V - C_p)]$, и уравнение политропы записывается в виде (5.4), где $n = R / (C_V - C_p)$ (для идеального газа выполняется условие $T / V = \text{const}$).

в) Изотермический процесс: молярная теплоемкость $C \rightarrow \infty$, показатель политропы $n = 1$, и уравнение (5.4) принимает вид $T = \text{const}$.

г) Адиабатический процесс: молярная теплоемкость $C = 0$, в уравнении (5.4) предполагается $n = 1 + (R / C_V)$. Для идеального газа вследствие $b = 0$ уравнение (5.4) приводится к виду $TV^{\gamma-1} = \text{const}$, где $\gamma = C_p / C_V$ — показатель адиабаты Пуассона.

Отметим, что только при изотермическом процессе становится несущественной информация о постоянной Ван-дер-Ваальса b . Эта постоянная связана с учетом конечного объема молекул реального газа или с наличием сил отталкивания в системе, т. е. с определенной потенциальной энергией взаимодействия молекул. В отличие от постоянной b температура газа T является мерой средней кинетической энергии поступательного движения молекул независимо от уравнения состояния для термодинамического описания данного газа.

Задача 5.3 ([2], № 6.26). Два теплоизолированных баллона 1 и 2 наполнены воздухом и соединены короткой трубкой с вентилем. Известны объемы баллонов, а также давление и температура воздуха в них ($V_1, p_1, T_1, V_2, p_2, T_2$). Найти температуру и давление воздуха, которые установятся после открытия вентиля.

Ответ:

$$T = T_1 T_2 (p_1 V_1 + p_2 V_2) / (p_1 V_1 T_2 + p_2 V_2 T_1); \quad (5.6)$$

$$p = (p_1 V_1 + p_2 V_2) / (V_1 + V_2). \quad (5.7)$$

Рассмотрим частные случаи равенства отдельных термодинамических параметров системы.

а) Пусть $V_1 = V_2$. Тогда согласно формулам (5.6) и (5.7) определяются температура

$$T = T_1 T_2 (p_1 + p_2) / (p_1 T_2 + p_2 T_1) \quad (5.8)$$

и давление

$$p = (p_1 + p_2) / 2. \quad (5.9)$$

Если бы температуры газов до открытия вентиля совпадали, то из выражения (5.8) следовало бы равенство $T = T_1 = T_2$ при давлении, определяемом по формуле (5.9).

б) Пусть $p_1 = p_2$. Тогда из формул (5.6) и (5.7) следуют выражения

$$T = T_1 T_2 (V_1 + V_2) / (V_1 T_2 + V_2 T_1) \quad (5.10)$$

и $p = p_1 = p_2$. Если бы и температуры газов вначале совпадали, то равенство $T = T_1 = T_2$ выполнялось бы независимо от отношения объемов V_1 / V_2 .

в) Пусть $T_1 = T_2$. Тогда выражение (5.6) превращается в тривиальное условие, а давление в системе по-прежнему определяется соотношением (5.7). Если бы и объемы газов до открытия вентиля совпадали, то давление определялось бы согласно (5.9).

Наконец, следует отметить аналогию между соотношениями (5.8) и (5.10), определяющими температуру системы: одно выражение переходит в другое при замене $p_i \rightarrow V_i$ и наоборот. Такая «равноправность» сомножителей следует из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV = \nu R T$: в его левой части термодинамические параметры p и V выступают как сомножители, определяющие температуру T идеального газа.

Задача 5.4 ([1], № 29.3, с. 199). Найти для идеального газа уравнение такого процесса, при котором теплоемкость газа изменяется с температурой по закону $C = \alpha / T$, где $\alpha = \text{const}$.

Ответ:

$$VT^{\gamma-1} / e^{\alpha/(RT)} = \text{const}. \quad (5.11)$$

Процесс, протекающий в идеальном газе, не является в общем случае политропическим. Однако при предельном переходе выраже-

ние (5.11) удастся преобразовать к известным уравнениям политропических процессов. Для этого теплоемкость $C = \alpha / T$, например, можно предположить равной 0. Тогда при $\alpha = 0$ и $T > 0$ уравнение (5.11) приобретает вид $VT^{1/(\gamma-1)} = \text{const}$, что эквивалентно соотношению $TV^{\gamma-1} = \text{const}$ или $pV^{\gamma} = \text{const}^*$. Последние два соотношения характеризуют адиабату Пуассона. Как известно, при адиабатическом процессе теплоемкость газа $C = 0$.

Задача 5.5 ([8], № 2.133). Вычислить работу A идеального газа при его политропическом ($pV^n = \text{const}$) расширении из состояния (p_1, V_1) в состояние с объемом V_2 . Отдельно рассмотреть случай $n = 1$.

Ответ:

$$A = \frac{p_1 V_1}{n-1} [1 - (V_1 / V_2)^{n-1}], \quad (5.12)$$

при $n = 1$

$$A = p_1 V_1 \ln(V_2 / V_1). \quad (5.13)$$

Уравнение политропы идеального газа $pV^n = \text{const}$ содержит показатель $n = (C - C_p) / (C - C_V)$ (см. задачу 5.2), где C — молярная теплоемкость идеального газа при политропическом процессе, C_p и C_V — молярные теплоемкости идеального газа при изобарическом и изохорическом процессе соответственно. При анализе соотношения (5.12) целесообразно рассмотреть, каким образом изменение показателя политропы n (а следовательно, и соотношений между теплоемкостями C , C_p и C_V) влияет на величину работы A , совершаемой идеальным газом.

В случае $n = \gamma = C_p / C_V > 1$ общий вид выражения (5.12) не изменяется, т. е. работа газа при адиабатическом процессе определяется через отношение теплоемкостей C_p / C_V . В случае $n = 0$ выражение (5.12) преобразуется к виду $A = p_1(V_2 - V_1)$, причем $p_1 = p_2$ и имеет место изобарический процесс. В случае $V_2 > V_1$ имеет место изобарическое расширение газа, при этом работа $A > 0$. В предельном случае $n \rightarrow \infty$ ($V = \text{const}$) из выражения (5.12) следует $A \rightarrow 0$. Наконец, случай $n = 1$ ($C \rightarrow \infty$) соответствует изотермическому процессу, при котором работа определяется согласно (5.13). Во всех рассмотренных

выше случаях работа газа численно равна площади под кривой $p(V)$ в интервале $[V_1; V_2]$.

Задача 5.6 ([2], № 6.42). Объем моля идеального газа с показателем адиабаты γ изменяется по закону $V = a / T$, где a — постоянная. Найти количество тепла, полученное газом в этом процессе, если его температура испытала приращение ΔT .

Ответ:

$$Q = R \Delta T (2 - \gamma) / (\gamma - 1). \quad (5.14)$$

Из выражения (5.14) следует, что количество теплоты Q , подведенного к газу, оказывается не зависящим от изменения объема, давления газа и известного из условия параметра a . Согласно (5.14) количество теплоты $Q \sim \Delta T$. Известно, что $\gamma = C_p / C_V = (i + 2) / i$, где $i \geq 3$ — число степеней свободы молекулы газа, и для различных газов справедливо неравенство $(2 - \gamma) / (\gamma - 1) > 0$. Следовательно, Q и ΔT из формулы (5.14) имеют одинаковые знаки, т. е. в данном процессе поглощение (выделение) теплоты газом сопровождается повышением (понижением) его температуры. Обратим внимание, что при $a = 0$ мы приходим к тривиальному равенству $V(T) = 0$, соответствующему отсутствию газа в термодинамической системе.

Задача 5.7 ([2], № 6.49). Один моль идеального газа с показателем адиабаты γ совершает процесс, при котором его давление $p \sim T^\alpha$, где α — постоянная. Найти:

а) работу, которую произведет газ, если его температура испытает приращение ΔT ;

б) молярную теплоемкость газа в этом процессе; при каком значении α теплоемкость будет отрицательной?

Ответ:

$$\text{а) } A = (1 - \alpha) R \Delta T; \quad (5.15)$$

$$\text{б) } C = C_V + R(1 - \alpha); C < 0 \text{ при } \alpha > \gamma / (\gamma - 1). \quad (5.16)$$

Отметим, что уже в условии задачи делается попытка привлечь внимание студентов к анализу получаемого ответа. Выражение (5.15)

показывает, что знак работы A неоднозначен и определяется знаками $1 - \alpha$ и ΔT . Полученная формула (5.15) позволяет убедить студентов в ошибочности встречающегося мнения, будто приращение ΔT коррелирует по знаку с работой A . Например, из формулы (5.15) следует, что в случае $\alpha > 1$ работа $A < 0$ при $\Delta T > 0$.

Представляет интерес и случай $C < 0$ из (5.16): в этой связи важно вспомнить определение молярной теплоемкости C и физический смысл входящих в формулу C величин. Как и в формуле (5.15), здесь основной акцент делается на параметр α и его связь с показателем адиабаты γ .

Задача 5.8 ([2], № 6.60). Определить для ван-дер-ваальсовского газа разность молярных теплоемкостей $C_p - C_V$.

Ответ:

$$C_p - C_V = R / \left[1 - \frac{2a(V-b)}{RTV^3} \right]. \quad (5.17)$$

Уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева–Клапейрона) может быть легко получено из уравнения состояния реального газа (по Ван-дер-Ваальсу) при предельном переходе $a \rightarrow 0$, $b \rightarrow 0$. Аналогичным образом от формулы (5.17) можно перейти к отношению

$$C_p - C_V = R, \quad (5.18)$$

известному как уравнение Р. Майера. Очевидно, уравнение (5.18) справедливо для идеальных газов.

Далее обратим внимание на неодинаковую роль постоянных a и b в выражении (5.17): формально условие (5.18) может быть получено из (5.17) при $a = 0$ и произвольном b . В данном случае постоянная a играет более важную роль, чем b . Как известно, постоянная a связана с дополнительным (по сравнению с идеальным газом) внутренним давлением, возникающим за счет сил притяжения между молекулами реального газа. Постоянная b связана с учетом конечного объема молекул реального газа.

Задача 5.9 ([2], № 6.165). Один моль ван-дер-ваальсовского газа, имевший объем V_1 и температуру T_1 , переведен в состояние с объемом V_2 и температурой T_2 . Найти приращение энтропии газа, считая его молярную теплоемкость C_V известной.

Ответ:

$$\Delta S = C_V \ln(T_2 / T_1) + R \ln[(V_2 - b) / (V_1 - b)]. \quad (5.19)$$

Из выражения (5.19) видно, что размерности энтропии S в расчете на 1 моль, молярной теплоемкости газа C_V и универсальной газовой постоянной R совпадают. Энтропия является функцией состояния, и поэтому приращение энтропии $\Delta S = S_2 - S_1$ зависит от начального и конечного состояний газа. Вследствие этого в формуле (5.19) присутствуют слагаемые, пропорциональные $\ln(T_2 / T_1) = \ln T_2 - \ln T_1$ и $\ln[(V_2 - b) / (V_1 - b)] = \ln(V_2 - b) - \ln(V_1 - b)$, где b — постоянная Ван-дер-Ваальса (см. задачу 5.8). В отличие от формулы (5.17), где был возможен переход к идеальному газу вследствие $a \rightarrow 0$, теперь в (5.19) мы имеем подобный переход при $b \rightarrow 0$. Местоположение постоянной b в формуле (5.19) указывает на роль объема, занимаемого молекулами газа внутри замкнутого сосуда, а различные микросостояния, влияющие на энтропию S системы, связаны с распределением этих молекул по объему сосуда. Интуитивно ясно, что подобную связь с постоянной Ван-дер-Ваальса a , характеризующей силы притяжения между молекулами газа, установить на качественном уровне не удастся.

Знак ΔS из выражения (5.19) зависит как от соотношения между T_2 и T_1 , так и от соотношения между V_2 и V_1 — начальными и конечными значениями термодинамических параметров системы.

5.2. Основы молекулярно-кинетической теории

Задача 5.10 ([16], № 8.4, с.105). Площадь окна $S = 2 \text{ м}^2$, расстояние между рамами $l = 0,2 \text{ м}$. Наружное стекло имеет температуру $T_1 = -10^\circ\text{C}$, внутреннее — $T_2 = 20^\circ\text{C}$. Давление воздуха между рамами атмосферное, а температура его линейно изменяется вдоль l от T_1 до T_2 . Определить полную энергию молекул и полное число молекул воздуха между рамами.

Ответ:

$$W = (i / 2) p S l = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Дж}; \quad (5.20)$$

$$N = \frac{pSl}{k(T_2 - T_1)} \ln \frac{T_2}{T_1} = 1,06 \cdot 10^{25}, \quad (5.21)$$

где p — давление, T_1 и T_2 — температуры, определяемые по термодинамической шкале.

В выражении (5.20) коэффициент i характеризует число степеней свободы молекул газа. Анализ формулы (5.21) позволяет избежать встречающейся в рассуждениях студентов ошибки, будто в изотермических условиях (при $T_1 = T_2$) следует ожидать число молекул газа между рамами $N = 0$, а молекулы газа оказываются там благодаря неравновесным и изменяющимся во времени условиям. Однако на самом деле мы имеем дело со стационарными условиями: ни температура слоев воздуха близи рам, ни ее распределение в объеме не изменяются со временем. Предельный переход $T_2 \rightarrow T_1$ (т. е. изотермические условия между рамами) возможен. В этом случае выражение (5.21) записывается следующим образом:

$$N = (p S l / k) \cdot \lim_{T_2 \rightarrow T_1} \frac{\ln(T_2 / T_1)}{T_2 - T_1} = (p S l) / (k T_1). \quad (5.22)$$

Из формулы (5.22) путем замены $N = n S l$ (n — объемная концентрация молекул) легко перейти к известному выражению $p = n k T$, являющемуся следствием уравнения Менделеева–Клапейрона.

Задача 5.11 ([2], № 6.120). Азот находится в очень высоком сосуде в однородном поле тяжести при температуре T . Температуру увеличили в η раз. На какой высоте концентрация молекул осталась прежней?

Ответ:

$$h = \frac{RT}{Mg} \frac{\eta \ln \eta}{\eta - 1}. \quad (5.23)$$

Для анализа выражения (5.23) при различных значениях η (т. е. при нагревании или охлаждении атмосферы) уместно привести формулу разложения $\ln(1 \pm \delta)$ в ряд Тейлора по малым $\delta \ll 1$: $\ln(1 \pm \delta) \approx \pm \delta + \dots$ (в нашем случае $\eta = 1 \pm \delta > 0$). Предположим, атмосфера нагревается, т. е. $\eta > 1$ и $\delta > 0$. Тогда формулу (5.23) можно заменить приближенным равенством $h \approx (1 + \delta) R T / (Mg)$, что больше высоты h при $\delta = 0$. Наоборот, если атмосфера охлаждается, то искомая высота $h \approx (1 - \delta) R T / (Mg)$, а это меньше высоты h в предельном случае $\delta = 0$. Полученное изменение высоты h согласуется с физическими представлениями о поведении молекул идеального газа в однородном поле силы тяжести в условиях изотермической атмосферы.

5.3. Явления переноса

Задача 5.12 ([2], № 6.205). Идеальный газ с молярной массой M находится в тонкостенном сосуде объемом V , стенки которого поддерживаются при постоянной температуре T . В момент $t = 0$ в стенке сосуда открыли малое отверстие площадью S , и газ начал вытекать в вакуум. Найти концентрацию n газа как функцию времени t , если в начальный момент $n(0) = n_0$.

Ответ:

$$n = n_0 \exp[-t S \sqrt{8RT / (\pi M)} / (4V)], \quad (5.24)$$

где M — молярная масса газа.

Проанализируем выражение (5.24), изменяя один из параметров системы. Например, при увеличении молярной массы газа $M' \rightarrow \tau M$ ($\tau > 1$) отношение объемных концентраций станет равным

$$n' / n = \exp\{[-t S \sqrt{8RT / (\pi M)} / (4V)] (\tau^{-1/2} - 1)\} > 1,$$

т. е. в фиксированный момент времени t объемная концентрация газа будет большей по сравнению с определенной по формуле (5.24). Иначе говоря, молекулы большей массы будут менее «охотно» покидать сосуд через малое отверстие площадью S . При увеличении площади отверстия $S' \rightarrow \xi S$ ($\xi > 1$) и прочих равных параметрах системы отношение объемных концентраций будет равным

$$n' / n = \exp \{ [t S \sqrt{8RT / (\pi M)} / (4V)] (1 - \xi) \} < 1,$$

а газ будет быстрее вытекать в вакуум. При увеличении объема сосуда от V до $V' = \varepsilon V$ ($\varepsilon > 1$) и прочих равных параметрах отношение объемных концентраций приобретает вид

$$n' / n = \exp \{ [t S \sqrt{8RT / (\pi M)} / (4V)] (1 - \varepsilon^{-1}) \} > 1,$$

т. е. в фиксированный момент времени t объемная концентрация молекул внутри сосуда будет выше, чем определяемая согласно формуле (5.24). Наконец, при увеличении температуры газа от T до $T' = \lambda T$ ($\lambda > 1$) и при прочих равных параметрах выполняется условие

$$n' / n = \exp \{ [t S \sqrt{8RT / (\pi M)} / (4V)] (1 - \lambda^{1/2}) \} < 1,$$

что свидетельствует о более быстром вытекании газа из сосуда при больших тепловых скоростях молекул газа.

Задача 5.13 ([2], № 6.221). Два куска металла, теплоемкости которых C_1 и C_2 , соединены между собой длинным стержнем длины l с площадью поперечного сечения S и достаточно малой теплопроводностью κ . Вся система теплоизолирована от окружающего пространства. В момент $t = 0$ разность температур между двумя кусками металла равна $(\Delta T)_0$. Пренебрегая теплоемкостью стержня, найти разность температур между кусками металла как функцию времени.

Ответ:

$$\Delta T = (\Delta T)_0 \exp(-\alpha t), \quad (5.25)$$

где $\alpha = (C_1^{-1} + C_2^{-1}) S \kappa / l$.

Проверим корректность полученного выражения (5.25), сделав несколько предельных переходов. При площади поперечного сечения $S \rightarrow 0$ коэффициент $\alpha \rightarrow 0$, а разность температур $\Delta T \rightarrow (\Delta T)_0$. При уменьшении коэффициента теплопроводности κ до нуля аналогично $\Delta T \rightarrow (\Delta T)_0$ вследствие $\alpha \rightarrow 0$. Наконец, при бесконечно большой длине стержня ($l \rightarrow \infty$) снова имеет место стремление $\Delta T \rightarrow (\Delta T)_0$ из-

за $\alpha \rightarrow 0$. Все три приведенных случая соответствуют условиям, когда теплопроводность внутри системы практически отсутствует.

Пусть теперь значительно различаются теплоемкости металлов, а упомянутые выше параметры S , κ и l остаются постоянными на протяжении всего опыта. При $C_1 \gg C_2$ коэффициент α в выражении (5.25) имеет вид $\alpha' \approx S\kappa / (C_2 l) < \alpha$. Вследствие этого происходит увеличение разности температур $\Delta T'$, что описывается формулой

$$\Delta T' / \Delta T = \exp[(\alpha - \alpha')t] > 1. \quad (5.26)$$

Соотношение, аналогичное (5.26), получится и при условии $C_2 \gg C_1$: в этом случае $\alpha' \approx S\kappa / (C_1 l) < \alpha$. Это связано с тем, при выводе формулы (5.25) не учитывается, какой из металлов — с теплоемкостью C_1 или C_2 — вначале был более нагретым. Основную физическую «нагрузку» несет разность температур ΔT , а ее знак в условии задачи не определен.

5.4. Жидкое состояние

Задача 5.14 ([2], № 6.299). Два мыльных пузыря с радиусами R_1 и R_2 , слившись, образовали пузырь радиуса R . Атмосферное давление равно p . Считая процесс изотермическим, найти поверхностное натяжение мыльной воды α .

Ответ:

$$\alpha = p(R^3 - R_1^3 - R_2^3) / [4(R_1^2 + R_2^2 - R^2)]. \quad (5.27)$$

При анализе выражения (5.27) сделаем допущение о равных радиусах мыльных пузырей ($R_1 = R_2$) в начальном состоянии. Так как $\alpha > 0$ и $p > 0$, то радиусы пузырей должны удовлетворять одной из следующих систем уравнений:

$$\begin{cases} R_1^3 > 2R_1^3 \\ R^2 < 2R_1^2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} R_1^3 < 2R_1^3 \\ R^2 > 2R_1^2 \end{cases},$$

что равносильно

$$2R_1 < R^3 / R_1^2 < 2R \quad (5.28)$$

или

$$2R_1 < R^3 / R_1^2 < 2R_1 \quad (5.29)$$

соответственно. Неравенство (5.29) не имеет смысла, поскольку нижняя и верхняя границы отношения R^3 / R_1^2 совпадают. Теперь предположим, что отношение радиусов $R / R_1 = n > 1$. Тогда условие (5.28) принимает вид $2 < n^3 < 2n$, и это неравенство справедливо в достаточно узком интервале значений $n \approx 1,3 \dots 1,4$. Столь изящный результат получается в приближении изотермичности процесса слияния пузырей с радиусами $R_1 = R_2$. Очевидно, отклонения от равенства $R_1 = R_2$ приведут к более сложному по сравнению с (5.28) условию, содержащему параметры $n_1 = R / R_1$ и $n_2 = R / R_2$.

Задача 5.15 ([2], № 6.309). Из круглого отверстия вытекает вертикальная струя воды так, что в одном из горизонтальных сечений ее диаметр $d = 2,0$ мм, а в другом сечении, расположенном ниже на $l = 20$ мм, диаметр струи в $n = 1,5$ раза меньше. Найти объем воды, вытекающей из отверстия за одну секунду.

Ответ:

$$V_1 = \pi d^2 \sqrt{2gl - [4\alpha(n-1)/(\rho d)]} / (4\sqrt{n^4 - 1}). \quad (5.30)$$

Сначала проверим размерность V_1 из выражения (5.30): расход жидкости измеряется в $\text{м}^3/\text{с}$. В формуле (5.30) α — коэффициент поверхностного натяжения жидкости, ρ — ее плотность. При $n \rightarrow 1$ знаменатель выражения (5.30) стремится к нулю; следовательно, имеем $V_1 \rightarrow \infty$. Получается, что конечность объема вытекающей жидкости тесно связана с геометрией струи: чем слабее меняется диаметр сечения струи при падении жидкости, тем больший расход жидкости имеет место.

Требование неотрицательности подкоренных выражений в (5.30) сводится к неравенствам $n \leq 1 + (g l \rho d) / (2\alpha)$ и $n > 1$. Рассматривая последние два неравенства совместно, определим, в каких пределах может изменяться диаметр вертикальной струи d :

$$d \geq (n-1)(2\alpha) / (g l \rho). \quad (5.31)$$

Из формулы (5.31) следует, что и с уменьшением коэффициента поверхностного натяжения жидкости α , и с увеличением ее плотности ρ диаметр струи d может варьироваться в более широком интервале. Причина таких изменений связана с балансом давлений — гидростатического $g l \rho$ и лапласовского $\alpha / (d / 2)$. Этот баланс давлений влияет на форму струи вытекающей жидкости.

Задача 5.16 ([8], № 2.284). Вычислить добавочное (за счет поверхностного натяжения) давление Δp_1 внутри сферической капли жидкости и Δp_2 — внутри сферического пузыря из пленки этой жидкости. Радиус капли и пузыря R , коэффициент поверхностного натяжения жидкости α .

Ответ:

$$\begin{aligned}\Delta p_1 &= 2\alpha / R; \\ \Delta p_2 &= 4\alpha / R.\end{aligned}\tag{5.32}$$

Выражение (5.32) целесообразно сравнить с формулой (5.27). Действительно, если не происходит слияния описанных в условии задачи 5.14 двух пузырей, то следует полагать их радиусы $R_1 \rightarrow \infty$ и $R_2 \rightarrow \infty$. Тогда после предельного перехода в выражении (5.27) получилось бы соотношение $\alpha = pR / 4$, отсюда $p = 4\alpha / R$ — атмосферное давление. Из условия задачи 5.16 следует, что обусловленное поверхностным натяжением добавочное давление Δp_2 внутри сферического пузыря как раз и уравнивается атмосферным давлением p . Таким образом, корректность формулы (5.32) легко проверяется с помощью соотношения (5.27).

Задача 5.17 ([17], № 2, с. 75). Капля ртути массой $m = 1,36$ г введена между горизонтальными стеклянными пластинками. Какую силу F следует приложить для того, чтобы расплющить каплю до толщины $h = 0,1$ мм? Считайте, что ртуть абсолютно не смачивает стекло.

Ответ:

$$F = \alpha [\sqrt{\pi \rho h / m} + (2 / h)] m / (\rho h) = 10 \text{ Н},\tag{5.33}$$

где α — коэффициент поверхностного натяжения ртути, ρ — ее плотность.

Представим выражение (5.33) для дальнейшего анализа в виде

$$F = \alpha \{ \sqrt{\pi \rho h / m} + [2m / (\rho h^2)] \}.$$

Уменьшение массы капли m приводит к уменьшению силы F , причем зависимость $F(m)$ имеет нелинейный характер. Уменьшение толщины h вызывает возрастание силы F , что напрямую связано с поверхностным эффектом: при постоянной массе капли и малой сжимаемости ртути следует ожидать увеличения площади поверхности S капли при ее расплющивании. Вследствие увеличения S возрастает сила лапласовского давления $F_{\text{л}} = p_{\text{л}} S$, а следовательно, возрастает сила внешнего давления F , равная по модулю $F_{\text{л}}$ в соответствии с III законом Ньютона. Очевидно, вследствие прямой пропорциональности лапласовского давления $p_{\text{л}}$ коэффициенту поверхностного натяжения α — искомая сила внешнего давления $F \sim \alpha$ (см. выражение (5.33)).

Задача 5.18 (на основе [18], № 3.20, с. 270). Найти давление p воды на глубине h , если на поверхности плотность воды ρ_0 , а атмосферное давление p_0 . Коэффициент сжимаемости воды равен β , температура и ускорение свободного падения предполагаются постоянными.

Ответ:

$$p(h) = p_0 - (1 / \beta) \ln(1 - \beta \rho_0 g h). \quad (5.34)$$

На первый взгляд может показаться, что при погружении в жидкость давление (5.34) на глубине становится меньше p_0 . Следует вспомнить, что коэффициент сжимаемости определяется [18] как

$$\beta = (1 / \rho)(\Delta \rho / \Delta p), \quad (5.35)$$

где ρ — плотность жидкости, причем $\beta > 0$. Далее нетрудно показать, что $\text{sgn}[\ln(1 - \beta \rho_0 g h)] < 0$, и поэтому давление $p(h)$ из формулы (5.35) является возрастающей функцией глубины h .

Давление $p(h)$ на глубине h в приближении несжимаемой жидкости определяется из предела

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} p(h) = p_0 - \lim_{\beta \rightarrow 0} [(-\rho_0 g h) / (1 - \beta \rho_0 g h)] = p_0 + \rho_0 g h.$$

В случае идеальной несжимаемой жидкости $\beta = 0$, и из формулы (5.35) следует, что $\Delta p = 0$. Это означает одинаковую плотность жидкости на поверхности (т. е. при $h = 0$) и на глубине h . Поэтому давление на глубине h равно $p(h) = p_0 + p_r$, где $p_r = \rho g h$ — гидростатическое давление, ρ — плотность несжимаемой жидкости.

5.5. Фазовые превращения

Задача 5.19 ([6], № 6.356). Воду массы $m = 1,00$ кг нагрели от температуры $t_1 = 10^\circ\text{C}$ до $t_2 = 100^\circ\text{C}$, при которой она вся превратилась в пар. Найти приращение энтропии системы.

Ответ:

$$\Delta S \approx m[c \ln(T_2 / T_1) + (q / T_2)] = 7,2 \text{ кДж/К}, \quad (5.36)$$

где c — удельная теплоемкость воды, q — удельная теплота парообразования, T_i — абсолютные температуры.

Знак «приблизительно равно» в соотношении (5.36) используется по двум причинам. Во-первых, при нагревании воды ее удельная теплоемкость $c(T)$ предполагается постоянной в температурном интервале $t_1 \leq T \leq t_2$. Во-вторых, процесс парообразования начинается при температуре $T < t_2$ даже при нормальном атмосферном давлении, когда поверхность воды начинают покидать наиболее «быстрые» молекулы H_2O . В целом формулировка задачи о нагревании воды до « $t_2 = 100^\circ\text{C}$, при которой она вся превратилась в пар», носит дискуссионный характер.

Задача 5.20 (на основе [15], № 543). На дне сосуда, откачиваемого до высокого вакуума, заморожен плоскопараллельный слой льда толщиной l , нижняя поверхность которого поддерживается при постоянной температуре T_0 . Определить эту температуру, если известно, что при откачке сосуда на верхней поверхности льда установилась температура T_1 . Коэффициент теплопроводности льда равен κ , а удельная теплота его сублимации равна q . Давление насыщенного

водяного пара над слоем льда при температуре T_1 в отсутствие откачки равно p .

Ответ:

$$T_0 = T_1 + (p \, l \, q / \kappa) \sqrt{M / (2\pi R T_1)}, \quad (5.37)$$

где M — молярная масса воды.

Вначале следует проверить размерность входящих в формулу (5.37) физических величин и убедиться в том, что

$$[(p \, l \, q / \kappa) \sqrt{M / (2\pi R T_1)}] = \text{К}.$$

Наибольший интерес при анализе соотношения (5.37) представляет нелинейная зависимость

$$T_0(T_1) = T_1 + \alpha T_1^{-1/2}. \quad (5.38)$$

Коэффициент $\alpha > 0$ из выражения (5.38) зависит как от термодинамических параметров газообразной фазы (p , M), так и от тепловых свойств твердой фазы (κ , q). Эти фазы сосуществуют в некоторых интервалах температуры и давления. Как следует из формул (5.37) и (5.38), увеличение p или q , а также уменьшение κ приведет к более заметной нелинейной зависимости $T_0(T_1)$ и к увеличению T_0 . Верхними границами T_0 и p являются параметры тройной точки ($T_{\text{тр}}$, $p_{\text{тр}}$), соответствующей термодинамическому равновесию газообразной, жидкой и твердой фаз. При температурах, превышающих $T_{\text{тр}}$, явление сублимации (т. е. фазовый переход лед — водяной пар) не наблюдается.

Список литературы

1. Беликов, Б.С. Решение задач по физике. Общие методы: Учеб. пособие [Текст] / Б.С. Беликов. — М.: Высш. шк., 1986. — 256 с.: ил.
2. Иродов, И.Е. Задачи по общей физике: Учеб. пособие [Текст] / И.Е. Иродов. — М.—СПб.: Физматлит, Невский Диалект, Лаборатория Базовых Знаний, 2001. — 432 с.: ил.
3. Сборник задач по общему курсу физики. Механика: Учеб. пособие [Текст] / Под ред. И.А. Яковлева. — М.: Наука, 1977. — 288 с.: ил.
4. Иродов, И.Е. Задачи по общей физике: Учеб. пособие [Текст] / И.Е. Иродов. — СПб.: Лань, 2009. — 416 с.: ил.
5. Матвеев, А.Н. Электричество и магнетизм: Учеб. пособие [Текст] / А.Н. Матвеев. — СПб.: Лань, 2010. — 464 с.: ил.
6. Антонов, Л.Н. Методика решения задач по электричеству [Текст] / Л.Н. Антонов, Л.Г. Деденко, А.Н. Матвеев. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982. — 168 с.: ил.
7. Сборник задач по общему курсу физики. Электричество и магнетизм: Учеб. пособие [Текст] / Под ред. И.А. Яковлева. — М.: Наука, 1977. — 272 с.: ил.
8. Бабаджан, Е.И. Сборник качественных вопросов и задач по общей физике: Учебное пособие [Текст] / Е.И. Бабаджан, В.И. Гервидс, В.М. Дубовик, Э.А. Нерсесов. — М.: Наука, 1990. — 400 с.: ил.
9. Крауфорд, Ф. Волны: Учеб. руководство. Пер. с англ. [Текст] / Ф. Крауфорд / Под ред. А.И. Шальникова и А.О. Вайсенберга. — М.: Наука, 1984. — 512 с.: ил.
10. Сборник задач по оптике и атомной физике [Текст] / Под ред. А.Г. Грамакова. — Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1973. — 144 с.: ил.
11. Сборник задач по общему курсу физики. Оптика: Учеб. пособие [Текст] / Под ред. И.А. Яковлева. — М.: Наука, 1977. — 320 с.: ил.
12. Савельев, И.В. Сборник вопросов и задач по общей физике: Учеб. пособие [Текст] / И.В. Савельев. — СПб.: Лань, 2007. — 288 с.: ил.
13. Калитеевский, Н.И. Волновая оптика: Учеб. пособие [Текст] / Н.И. Калитеевский. — СПб.: Лань, 2008. — 480 с.: ил.
14. Трофимова, Т.И. Сборник задач по курсу физики с решениями: Учеб. пособие [Текст] / Т.И. Трофимова, З.Г. Павлова. — М.: Высш. шк., 2001. — 591 с.: ил.
15. Сборник задач по общему курсу физики. Термодинамика и молекулярная физика: Учеб. пособие [Текст] / Под ред. Д.В. Сивухина. — М.: Наука, 1976. — 208 с.: ил.
16. Новодворская, Е.М. Методика проведения упражнений по физике во втузе: Учеб. пособие [Текст] / Е.М. Новодворская, Э.М. Дмитриев. — М.: Высш. шк., 1981. — 318 с.: ил.

17. Горбунова, О.И. Задачник-практикум по общей физике: Учеб. пособие [Текст] / О.И. Горбунова, А.М. Зайцева, С.Н. Красников. — М.: Просвещение, 1978. — 120 с.: ил.

18. Матвеев, А.Н. Молекулярная физика: Учебник [Текст] / А.Н. Матвеев. — СПб.: Лань, 2010. — 368 с.: ил.

*Виталий Юрьевич ТОПОЛОВ
Александр Соломонович БОГАТИН*

**АНАЛИЗ ОТВЕТОВ
ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ
ПО ОБЩЕЙ ФИЗИКЕ**
Учебное пособие

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.
Тел./факс: (812)412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 11.10.11.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Формат 84×108^{1/32}.
Печать офсетная. Усл. п. л. 5. Тираж 1500 экз.

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленных диапозитивов
в ОАО «Издательско-полиграфическое предприятие «Правда Севера».
163002, г. Архангельск, пр. Новгородский, д. 32.
Тел./факс (8182) 64-14-54; www.ippps.ru